

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

تابع $y = [2x]$ در نقاطی که عبارت داخل براکت به عدد صحیح تبدیل می‌شود، فاقد حد است، پس داریم:

$$1 < x < 4 \Rightarrow 2 < 2x < 8 \Rightarrow 2x = 3, 4, 5, 6, 7$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$$

یعنی تابع $y = [2x]$ در این ۵ نقطه فاقد حد است (زیرا حد چپ و راست تابع در این نقاط، نابرابرند). اما با دقت در صورت کسر و تجزیه عبارات درجه دوم داریم:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)(2x-3)(2x-5)}{[2x]}$$

در نقاط $x=2$ ، $x=3$ ، $x=\frac{3}{2}$ و $x=\frac{5}{2}$ ، حاصل حد تابع f به دلیل صفر شدن حد صورت و مخالف صفر بودن حد مخرج برابر صفر خواهد بود و بنابراین در این نقاط تابع f دارای حد است، اما در نقطه $x=\frac{7}{2}$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}^-} f(x) = \frac{(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(4)(2)}{6} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}^+} f(x) = \frac{(\frac{3}{2})(\frac{1}{2})(4)(2)}{7} = \frac{6}{7}$$

پس تابع f در نقطه $x=\frac{7}{2}$ فاقد حد است و بنابراین فقط در یک نقطه فاقد حد است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x & D = D_{f^{-1}} = R_f \\ f^{-1} \circ f(x) = x & D = D_f = R_{f^{-1}} \end{cases}$$

می‌دانیم:

بنابراین، هنگامی $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x)$ می‌شود که دامنه آن‌ها با هم برابر باشد، یعنی: $D_f = R_f$

$$x \geq -1 \Rightarrow D_f = [-1, +\infty)$$

در تابع $f(x) = a\sqrt{x+1} + b$ داریم:

با فرض $a > 0$ خواهیم داشت: (اگر $a < 0$ باشد، دامنه و برد برابر نخواهند شد.)

$$x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow a\sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow a\sqrt{x+1} + b \geq b \Rightarrow y \geq b \Rightarrow R_f = [b, +\infty)$$

در نتیجه $b = -1$ می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{f \circ f^{-1}(x) - 3} = k \Rightarrow k = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a\sqrt{x+1} - 1}{x - 3}$$

حد مخرج کسر برابر صفر است. برای اینکه جواب حد عددی حقیقی شود باید صورت نیز صفر شود، بنابراین:

$$a\sqrt{3+1} - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{x+1} - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{4}(x+1) - 1}{(x-3)(\frac{1}{2}\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{4}(x-3)}{2(x-3)} = \frac{1}{8}$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳

حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ به صورت $\frac{-1}{+}$ است، به شرطی $f(f(x))$ در $x=1$ حد دارد که $x=1$ ریشه مضاعف $x^2 + ax - a - 1 = 0$ باشد، پس $a = -2$ و داریم:

$$f(x) = \frac{x(x-2|x|)}{(x-1)^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-1}{+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^3}{t^2} = 3$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴

$$\sqrt{4x^2 - 12x} = \sqrt{(2x-3)^2 - 9} \approx 2x - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + bx - 1}{2x - 3} - 2x = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-4)x^2 + (b+6)x - 1}{2x - 3} = 2 \Rightarrow \begin{cases} a-4=0 \\ \frac{b+6}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow b-a = -6$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵

با گویا کردن مخرج کسر، عامل $x-2$ در مخرج وجود خواهد داشت. بنابراین عبارت زیر رادیکال باید به صورت $(x-2)^2$ باشد تا با مخرج ساده شود. خواهیم داشت:

$$x^2 + ax + b = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

$$c = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 + ax + b}}{\sqrt[3]{x+6} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{x+6} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{\sqrt[3]{x+6} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{\sqrt[3]{x+6} - 2}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}}} = \frac{-1}{\frac{1}{12}} = -12$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3ax + c}{bx + a} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-12x - 12}{4x - 4} = \frac{-24}{0^+} = -\infty$$

در نتیجه:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶

$$|u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases} \quad \text{نکته:}$$

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ و برعکس.

حد تابع در $x=1$ موجود و برابر ۳ است، پس باید حد چپ و راست تابع در $x=1$ نیز برابر ۳ باشند، داریم:

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow f(x) = x + a + (b-1) \frac{x-1}{x-1} = x + a + b - 1 \\ x < 1 \Rightarrow f(x) = x + a + (b-1) \frac{-(x-1)}{x-1} = x + a + 1 - b \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + a + b - 1 & x > 1 \\ x + a + 1 - b & x < 1 \end{cases}$$

طبق فرض $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ ، پس:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + a + b - 1) = a + b = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + a + 1 - b) = a - b + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2b - a = 2 - 2 = 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷

نکته: گوییم تابع f در $x = c$ پیوسته است، هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

ابتدا پیوستگی $f(x)$ را در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+4) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x) = 6 \\ f(2) = 2+4 = 6 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ در } x=2 \text{ پیوسته است.}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x-1) = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ در } x=0 \text{ ناپیوسته است.}$$

چون تابع $f(x)$ در $x = 0$ ناپیوسته است، پس گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند.

چون تابع $f(x)$ در $x = 0$ از راست ناپیوسته است، گزینه ۳ هم رد می‌شود.

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸

چون $f(x)$ یک تابع خطی است، پس ضابطه آن به شکل $f(x) = ax + b$ است. حد صورت در $x = 1$ برابر صفر است و حاصل حد عددی

غیر صفر است، پس حد مخرج نیز در $x = 1$ برابر صفر است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (ax + b) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

با جای گذاری در رابطه داده شده داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{ax + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{ax - a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{a(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{a} = \frac{2}{a}$$

طبق فرض این مقدار برابر ۱ است، بنابراین: $\frac{2}{a} = 1$ ، پس $a = 2$ در نتیجه $b = -2$. بنابراین:

$$f(x) = 2x - 2 \Rightarrow f(-1) = -4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹

نکته: در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، اگر $P(a) = Q(a) = 0$ ، باید $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کرده تا

عامل $(x-a)$ در صورت و مخرج ایجاد شود و با ساده کردن $(x-a)$ از صورت و مخرج، حد به دست آید.

حد مخرج صفر است، ولی حد کسر عددی حقیقی است، پس باید حد صورت هم برابر صفر باشد، بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -4} (x^2 + ax + b) = 0 \Rightarrow 16 - 4a + b = 0 \Rightarrow b = 4a - 16$$

با جای گذاری این مقدار داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + ax + (4a - 16)}{(x+4)(x-2)} &= \frac{7}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x^2 - 16) + a(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \frac{7}{6} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-4) + a(x+4)}{(x+4)(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-4+a)}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-4+a}{x-2} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{-8+a}{-4-2} = \frac{7}{6} \\ \Rightarrow -8+a &= -7 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 4a - 16 = 4 - 16 = -12 \Rightarrow a + b = -11 \end{aligned}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: تابع $f(x)$ در $x = c$ پیوسته است، هرگاه: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

با توجه به نکته بالا، هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \text{گزینه ۱: } & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} x[x-2] = 2 \times [0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x[x-2] = 2 \times [0^-] = -2 \end{cases} & \times \\
 \text{گزینه ۲: } & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sin\left(\frac{\pi[x]}{2}\right) = \sin\pi = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \sin\left(\frac{\pi[x]}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{cases} & \times \\
 \text{گزینه ۳: } & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \cos(\pi[x]) = \cos(2\pi) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \cos(\pi[x]) = \cos(\pi) = -1 \end{cases} & \times \\
 \text{گزینه ۴: } & \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)[x] = 0 \times [2^+] = 0 \\ f(2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2)[x] = 0 \times [2^-] = 0 \end{cases} & \checkmark
 \end{aligned}$$

گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ در $x = 2$ فاقد حد و در نتیجه ناپیوسته‌اند، ولی گزینه ۴ پیوسته است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است؛ هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

$$f(x) = [x^3 + x - 3] = [x^3 + x] - 3 \quad \text{ابتدا داریم:}$$

از طرفی توابع $y = x^3$ و $y = x$ اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها یعنی تابع $g(x) = x^3 + x$ اکیداً صعودی است. بنابراین تابع f وقتی ناپیوسته است که تابع $g(x) = x^3 + x$ مقادیر صحیح را اختیار کند. یعنی باید مقدار k را طوری بیابیم که مقادیر تابع g حداکثر ۵ بار برابر عددی صحیح شود.

$$-\sqrt[3]{2} < x < k \xrightarrow{g \text{ اکیداً صعودی}} g(-\sqrt[3]{2}) < g(x) < g(k) \Rightarrow -2 - \sqrt[3]{2} < g(x) < k^3 + k \quad \text{اکنون داریم:}$$

با توجه به اینکه $-2 - \sqrt[3]{2} \approx -3.25$ ، پس اگر مقادیر $g(x)$ -3 ، -2 ، -1 ، 0 و 1 را اختیار کند تابع $f(x)$ در ۵ نقطه ناپیوسته خواهد شد. بنابراین حداکثر عبارت $k^3 + k$ برابر ۲ خواهد بود و داریم:

$$k^3 + k = 2 \Rightarrow k^3 + k - 2 = 0 \Rightarrow (k-1) \underbrace{(k^2 + k + 2)}_{\Delta < 0} = 0 \Rightarrow k = 1$$

پس بیشترین مقدار k برابر یک است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

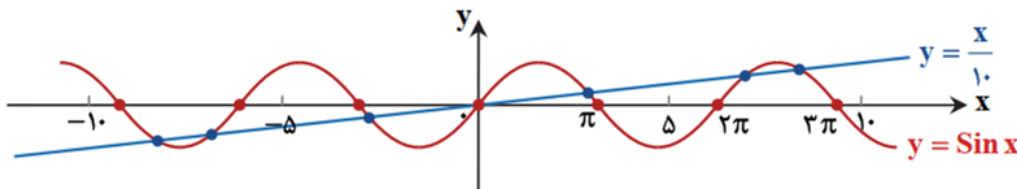
نکته: تابع f را در نقطه $x = c$ ($c \in \mathbb{R}$) پیوسته می‌نامیم، هرگاه $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

هر دو تابع $y = \sin x$ و $y = \frac{x}{10}$ در دامنه خود پیوسته هستند. پس کافی است شرط پیوستگی در $x = a$ برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \sin x = \sin a, \quad f(a) = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x}{10} = \frac{a}{10}$$

باید مقادیر a را طوری بیابیم که $\sin a = \frac{a}{10}$. برای حل این معادله کافی است نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{x}{10}$ را رسم کنیم و تعداد نقاط برخورد را به دست آوریم. پس داریم:



با توجه به نمودار، دو تابع در ۷ نقطه با هم برخورد می‌کنند، پس a می‌تواند ۷ مقدار مختلف باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

تذکر: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$

در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x - a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود و با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

نکته: در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x - a)$ بخش پذیرند.

بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x - a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

صورت کسر را بر $x - 1$ تقسیم و آن را تجزیه می‌کنیم. سپس صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x - 1 & x - 1 \\ - (2x^3 - 2x^2) & 2x^2 + 2x + 1 \\ \hline 2x^2 - x - 1 & \\ - (2x^2 - 2x) & \\ \hline x - 1 & \\ - (x - 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{1-\sqrt{2x-1}} \right) \times \frac{1+\sqrt{2x-1}}{1+\sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2+2x+1)(1+\sqrt{2x-1})}{-2(x-1)} = \frac{5 \times 2}{-2} = -5$$

اکنون داریم:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: اگر $k \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه: $k \leq x < k+1 \Rightarrow [x] = k$

نکته: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این صورت:

الف) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب) اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

پ) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ت) اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

حاصل حد راست و حد چپ تابع را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(-1)^{[x]} - ax}{x^2 - 4} = \frac{(-1)^2 - 2a}{4^+ - 4} = \frac{1 - 2a}{+} = +\infty$$

$$x \rightarrow 2^+ \Rightarrow [x] = 2, \quad x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x^2 \rightarrow 4^+$$

مخرج کسر عددی مثبت و حاصل حد برابر $+\infty$ است، پس باید صورت کسر عددی مثبت باشد؛ یعنی:

$$1 - 2a > 0 \Rightarrow 2a < 1 \Rightarrow a < \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$x \rightarrow 2^- \Rightarrow [x] = 1, \quad x \rightarrow 2^- \Rightarrow x^2 \rightarrow 4^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(-1)^{[x]} - ax}{x^2 - 4} = \frac{(-1)^1 - 2a}{4^- - 4} = \frac{-1 - 2a}{-} = +\infty$$

مخرج کسر عددی منفی و حاصل حد برابر $+\infty$ است، پس صورت کسر باید عددی منفی باشد؛ یعنی:

$$-1 - 2a < 0 \Rightarrow 2a > -1 \Rightarrow a > -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} \Rightarrow |a| < \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در

نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت یا مخرج ظاهر شود و با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

حد صورت کسر در $x = -1$ برابر صفر است و از طرفی جواب حد برابر $-\frac{1}{3}$ است. پس حد مخرج کسر نیز باید در $x = -1$ برابر صفر باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^3 + ax + b = 0 \Rightarrow 1 - a + b = 0 \Rightarrow b = a - 1 \quad (*)$$

اکنون حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} - x}{x^3 + ax + b} &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\sqrt[3]{x} - x}{x^3 + ax + a - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + x^2}{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^3}{(x-1)(x+1) + a(x+1)} \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + x\sqrt[3]{x} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(1-x)(1+x)}{(x+1)(x+a-1)} \times \frac{1}{3} = \frac{(-1)(2)}{a-2} \times \frac{1}{3} = \frac{-2}{3(a-2)} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a-2=2 \Rightarrow a=4 \xrightarrow{(*)} b=3 \end{aligned}$$

پس $ab = 12$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

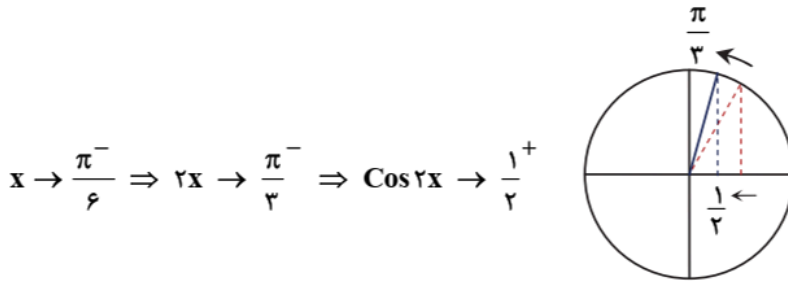
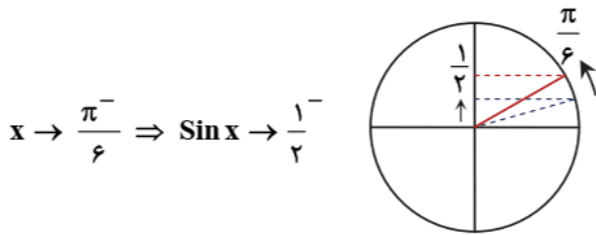
نکته: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد،

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \text{آنگاه:}$$

حاصل حد بی‌نهایت است، پس $x = \frac{\pi}{6}$ باید ریشهٔ مخرج کسر $\frac{ax-b}{a\sin x + \cos 2x}$ باشد، بنابراین داریم:

$$a\sin x + \cos 2x = 0 \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} a\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -1$$

حال باید علامت مخرج یعنی $-\sin x + \cos 2x$ را در همسایگی چپ $x = \frac{\pi}{6}$ مشخص کنیم. با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:



با توجه به مطالب بالا داریم:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{6}^- \Rightarrow -\sin x + \cos 2x \rightarrow 0^+$$

پس مخرج در همسایگی چپ $x = \frac{\pi}{6}$ مثبت است و برای اینکه حاصل حد $+\infty$ باشد باید صورت نیز به‌ازای $x = \frac{\pi}{6}$ عددی مثبت باشد،

بنابراین:

$$ax - b > 0 \xrightarrow[x=-1]{x=\frac{\pi}{6}} -\frac{\pi}{6} - b > 0 \Rightarrow b < -\frac{\pi}{6}$$

با توجه به اینکه $\pi \approx 3.14$ ، بنابراین بزرگ‌ترین مقدار صحیح برای b ، عدد $b = -1$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: فرض کنیم f در یک همسایگی چپ از a تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر کوچک تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

نکته: فرض کنیم تابع f در بازه ای مثل $(-\infty, b)$ تعریف شده باشد. رابطه $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

با توجه به نمودار تابع، $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ عددی متناهی است. وقتی $x > 2$ است، یعنی در ضابطه $y = \frac{x^2 - 5x + c}{x^3 - 8}$ ، $x = 2$ ریشه مخرج است. پس باید $x = 2$ ریشه صورت نیز باشد تا حد تابع نامتناهی نشود، بنابراین:

$$x^2 - 5x + c = 0 \xrightarrow{x=2} 4 - 10 + c = 0 \Rightarrow c = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = -\frac{1}{12}$$

با توجه به نمودار تابع، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ است، پس $x = 2$ ریشه مخرج ضابطه اول است:

$$\sqrt{ax + 4} = 0 \xrightarrow{x=2} \sqrt{2a + 4} = 0 \Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = -2$$

از طرفی $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ با $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ یعنی $-\frac{1}{12}$ برابر است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{-2x + 4}} + b \right) = \frac{1}{+\infty} + b = 0 + b = b \Rightarrow b = -\frac{1}{12}$$

پس:

$$abc = -2 \times -\frac{1}{12} \times 6 = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

با کمک اتحاد مزدوج حاصل را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{4x+4} - 2\sqrt{x})(\sqrt{4x+4} + 2\sqrt{x})}{\sqrt{4x+4} + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(4x+4-4x)}{\sqrt{4x(1+\frac{1}{x})} + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sqrt{x}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} = 1$$

پس $L = 1$ است. اکنون $f(1)$ را به دست می آوریم:

$$f(1) = (\sqrt{1})(\sqrt{4+4} - 2\sqrt{1}) = \sqrt{8} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

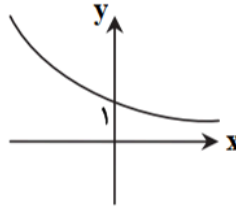
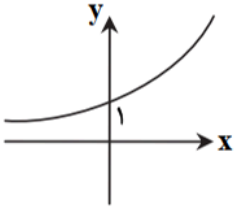
نکته (قضیه): فرض کنیم n عددی طبیعی باشد، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (\text{ب})$$

با توجه به نمودار $y = a^x$ داریم:

$$a > 1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \end{cases}$$

$$0 < a < 1: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty \end{cases}$$



اکنون حاصل حد داده شده را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \times 4^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x \times 3}{4^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \times \frac{1}{2}}{4^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \left(\frac{1}{2}\right)}{4^x \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^x\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: اگر در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند؛ $P(a) = Q(a) = 0$ باشد، نمی‌توان حاصل حد را با قضایای

حد، محاسبه کرد و باید ابتدا $P(x)$ و $Q(x)$ را بر $x - a$ تقسیم کرد و سپس بر $x - a$ ساده کنیم و سپس با قانون تقسیم، حاصل حد را به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - a}{x^2 + 2x + b} = \frac{a - a}{1 + b} = \frac{0}{1 + b}$$

اگر $3 + b$ عددی مخالف صفر باشد، حاصل حد برابر صفر می‌شود که با فرض سؤال مغایرت دارد، پس $x = 1$ ریشه صورت و مخرج کسر می‌باشد. در نتیجه مخرج کسر نیز باید صفر باشد:

$$3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

بنابراین:

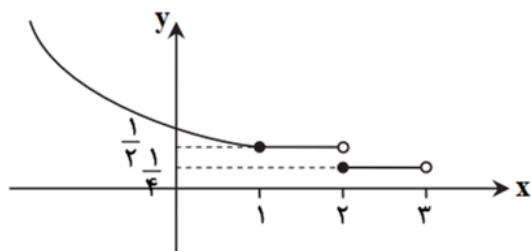
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - a}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x+1)}{x+3} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۱

■ تابع f در صورتی روی بازه $(-\infty, k)$ پیوسته است که در تمام نقاط این بازه پیوسته باشد.

به کمک رسم نمودار تابع f ، پیوستگی تابع را در همسایگی $x=1$ بررسی می‌کنیم:



$$\begin{cases} x < 1 \Rightarrow f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \\ 2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

با توجه به نمودار، تابع در بازه $(-\infty, 2)$ پیوسته است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۲

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$

در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

با توجه به شکل مشاهده می‌شود $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ است.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{a - \sqrt{2a}}{a^2 - a^2}$$

چون مخرج کسر صفر است، پس باید صورت کسر نیز صفر باشد، زیرا در غیر این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

$$a - \sqrt{2a} = 0 \Rightarrow a^2 = 2a \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

راه حل اول:

با توجه به شکل، مقدار $a = 2$ قابل قبول است:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{x+2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{16} \Rightarrow L = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

راه حل دوم:

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ می‌توان از قاعده هوییتال استفاده کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{2x} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{4} = \frac{3}{16}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

چون جواب حد متناهی فرض شده است، پس حالت‌هایی که حد را به بی‌نهایت میل می‌دهند، بررسی نمی‌کنیم و داریم:

$$۱) m, n < ۴ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

$$۲) \text{ اگر } m = n = ۴ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{2}{5}$$

$$۳) \text{ اگر } m = ۴, n < ۴ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{2}{3}$$

$$۴) \text{ اگر } n = ۴, m < ۴ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{5}$$

$$۵) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = ۰ \text{ هر مقدار طبیعی برای } m, n \text{ که درجه صورت از درجه مخرج کوچک‌تر شود مانند } m < ۴, n > ۴ \text{ و } \dots$$

$$۶) m, n > ۴, m = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$$

نکته: تابع f را در نقطه $x = c$ پیوسته نامیم، هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

ابتدا با توجه به حد داده شده، مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - bx}{x+1} - ax \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - bx - ax^2 - ax}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-a)x^2 + (-b-a)x}{x+1} = 3$$

جواب حد برابر ۳ و مخرج عبارت درجه اول است، پس باید صورت نیز عبارتی درجه اول باشد.

بنابراین:

$$2-a=0 \Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-b-a)x}{x} = 3 \xrightarrow{a=2} -b-2=3 \Rightarrow b=-5$$

اکنون پیوستگی تابع f را در نقطه $x = -2$ بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{\sqrt{x^2+4x+4}} & ; x < -2 \\ -4 & ; x = -2 \\ 2[-2x]-10 & ; x > -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{(x+2)^2}} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4-x^2}{|x+2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{-(x+2)} = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2[-2x]-10 = 2[(4)^-]-10 = 8-10 = -4$$

$$f(-2) = -4$$

بنابراین تابع f در نقطه $x = -2$ پیوسته است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

نکته: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این صورت اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

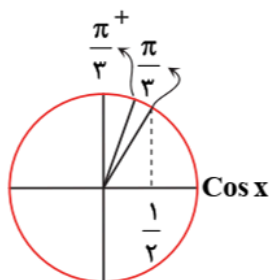
جواب حد برابر $+\infty$ است، پس $x = \frac{\pi}{3}$ ریشهٔ مخرج کسر است:

$$a \cos 2x + 3 \cos x = 0 \xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} a \cos \frac{2\pi}{3} + 3 \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow a = 3$$

اکنون مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$a = 3 \Rightarrow 3 \cos 2x + 3 \cos x = 3(2 \cos^2 x - 1 + \cos x) = 3(2 \cos^2 x + \cos x - 1) = 3(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)$$

با توجه به دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+ \Rightarrow \cos x \rightarrow \frac{1}{2}^- \Rightarrow 2 \cos x - 1 < 0$$

حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \frac{3x + b}{3(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)} = +\infty \Rightarrow \frac{\pi + b}{\underbrace{3(0^-)(\frac{3}{2})}_{-}} = +\infty$$

علامت مخرج منفی است، پس باید علامت صورت نیز منفی باشد تا جواب حد $+\infty$ شود؛ بنابراین:

$$\pi + b < 0 \Rightarrow b < -\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفرشدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود، سپس با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow [x] = 1$$

ابتدا داریم:

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow |x - [x]| = \underbrace{|x - 1|}_{+} = x - 1$$

بنابراین:

روش اول: صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x+3\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+3\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3\sqrt{x}-4x}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3\sqrt{x}-3x}{x-1} \times \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \times \frac{1}{4} = \frac{-3}{2} \times \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

روش دوم: با استفاده از قاعده هوییتال حاصل حد را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{x-1} \stackrel{\text{Hop}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1+\frac{3}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+3\sqrt{x}}} - \frac{2}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1+\frac{3}{2}}{2\sqrt{4}} - 1 = \frac{5}{8} - 1 = -\frac{3}{8}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: در سهمی $y = a(x-x_S)^2 + y_S$ که $a \neq 0$ است، نقطه $S(x_S, y_S)$ رأس سهمی است.نکته: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این صورت اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ابتدا ضابطه سهمی f را به دست می آوریم:

$$S(-1, -1) \Rightarrow y = a(x+1)^2 - 1 \xrightarrow{(\cdot, 1) \in y} 1 = a(\cdot+1)^2 - 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = f(x) = 2(x+1)^2 - 1 = 2x^2 + 4x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{2x^2+4x+1+g(x)} = +\infty$$

بنابراین:

حد صورت برابر با ۳ و حاصل حد برابر با $+\infty$ است، پس حد مخرج در $x=1$ برابر صفر است. از طرفی در اطراف $x=1$ علامت مخرج تغییر نکرده است، پس $x=1$ ریشه مضاعف مخرج است. چون $g(x)$ تابع خطی است و ضریب x^2 در مخرج برابر ۲ است، مخرج کسر باید به صورت $2(x-1)^2$ باشد. پس داریم:

$$2x^2 + 4x + 1 + g(x) = 2(x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow 4x + 1 + g(x) = -4x + 2 \Rightarrow g(x) = -8x + 1$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۸

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر و با ساده کردن آن از صورت و مخرج بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+a}-1}{x^2+x-2} = b$$

با توجه به اینکه حد مخرج در $x = -2$ برابر صفر است، باید حد صورت هم در $x = -2$ صفر شود تا حاصل آن پس از رفع ابهام عدد b شود، پس داریم:

$$\sqrt{-2+a}-1=0 \Rightarrow \sqrt{-2+a}=1 \Rightarrow -2+a=1 \Rightarrow a=3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+3}-1}{x^2+x-2} \times \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt{x+3}+1} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3-1}{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+3}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+1)} = \frac{1}{-3 \times 2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow b = -\frac{1}{6} \Rightarrow a-b = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۹

نکته: اگر $(L \neq 0)$ ، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ، $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و g در همسایگی محذوف a مثبت باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & L > 0 \\ -\infty & L < 0 \end{cases}$$

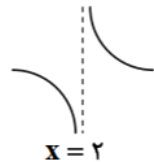
به زبان ساده تر می توان گفت:

$$۱) \frac{\text{عدد مثبت}}{+} = +\infty \quad ۲) \frac{\text{عدد مثبت}}{-} = -\infty \quad ۳) \frac{\text{عدد منفی}}{+} = -\infty \quad ۴) \frac{\text{عدد منفی}}{-} = +\infty$$

با فرض $x \neq 2$ می توان ضابطه f را به صورت $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x-1}{x-2}$ نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2} = \frac{1}{-} = -\infty$$



پس نمودار تابع در اطراف $x = 2$ به صورت روبه رو است:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته: در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$ ، اگر $f(a) = g(a) = 0$ ، نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$

بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$ ، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطه a ، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود و با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک

عدد حقیقی غیر صفر است. در این صورت: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n$

حد مخرج کسر در حد داده‌شده برابر صفر است و جواب حد برابر عدد غیر صفر b است. پس باید حد صورت کسر نیز در $x = 1$ برابر صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - \sqrt{2x+a}) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{2+a} = 0 \Rightarrow a = -1$$

اکنون حاصل حد را به‌دست می‌آوریم تا مقدار b به‌دست آید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^3 - 3x + 2} \times \frac{x + \sqrt{2x-1}}{x + \sqrt{2x-1}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x^3 - 3x + 2)(x + \sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 (x+2)(x + \sqrt{2x-1})} = \frac{1}{(3)(2)} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2} + 2}{-x + \sqrt[3]{8x^3 - 3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x| + 2}{-x + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

دقت کنید وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، آنگاه: $|x| = -x$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

حد مخرج کسر برابر صفر است، پس برای آنکه حاصل حد وجود داشته و برابر عدد حقیقی $\frac{b}{3}$ باشد، باید حد صورت نیز برابر صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x + a) = 0 \Rightarrow 8 - 10 + a = 0 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین حاصل این حد برابر است با:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{\sqrt[3]{3x+2} - x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 5x + 2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + x\sqrt[3]{3x+2} + x^2)}{\sqrt[3]{(3x+2)^2} + x\sqrt[3]{3x+2} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x - 1)(4 + 4 + 4)}{(x-2)(-x^2 - 2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12(x^2 + 2x - 1)}{-x^2 - 2x - 1} = \frac{12(4 + 4 - 1)}{-4 - 4 - 1} = \frac{12 \times 7}{-9} = -\frac{28}{3} \end{aligned}$$

بنابراین $b = -28$ ، پس:

$$a + b = 2 - 28 = -26$$

توجه کنید که برای تجزیه $x^3 - 5x + 2$ و $-x^3 + 3x + 2$ داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x + 2 \quad \left| \begin{array}{r} x - 2 \\ x^2 + 2x - 1 \end{array} \right. \\ \hline -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 - 5x + 2 \\ \hline -(2x^2 - 4x) \\ \hline -x + 2 \\ \hline -(-x + 2) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} -x^3 + 3x + 2 \quad \left| \begin{array}{r} x - 2 \\ -x^2 - 2x - 1 \end{array} \right. \\ \hline -(-x^3 + 2x^2) \\ \hline -2x^2 + 3x + 2 \\ \hline -(-2x^2 + 4x) \\ \hline -x + 2 \\ \hline -(-x + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

چون حد مخرج تابع در همسایگی $x=1$ برابر صفر است و حاصل حد عددی حقیقی است، پس باید صورت هم در همسایگی $x=1$

$$f^{-1}(1) - 4 = 0 \Rightarrow f(4) = 1 \Rightarrow \sqrt{4+c} - b = 1$$

برابر صفر شود (حالت $\frac{0}{0}$)، پس:

حد تابع بعد از رفع ابهام برابر عدد ۲ شده، پس:

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x+c} - b &\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+b)^2 - c; (x \geq -b) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - 4}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+b)^2 - c - 4}{x^2 + x - 2} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+b)}{2x+1} = 2 \\ \Rightarrow \frac{2(1+b)}{3} = 2 &\Rightarrow 1+b=3 \Rightarrow b=2 \rightarrow c=5 \end{aligned}$$

پس $f(x) = \sqrt{x+5} - 2$ است.

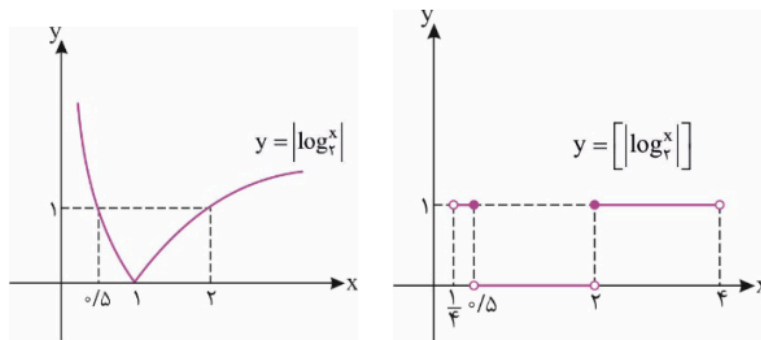
حاصل حد خواسته شده را می‌یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = \frac{1}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۳

ابتدا با توجه به گزینه‌ها در دامنه $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ نمودار $y = |\log_2^x|$ را رسم می‌کنیم. سپس به کمکی آن نمودار $y = \left\lceil \log_2^x \right\rceil$ را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار تابع روی بازه $(0, 5, 2)$ پیوسته است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۴

بنا به شرایط پیوستگی در توابع چند ضابطه‌ای خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \rightarrow 2a - b = 4 \quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) \rightarrow 1 - 1 = f(1) \rightarrow f(1) = 0$$

حال از $f(1) = 0$ خواهیم داشت:

$$f(1) = 0 \xrightarrow{\text{ضابطه بالایی}} a - b = 0 \rightarrow a = b \quad (II)$$

$$2a - b = 4 \xrightarrow{(II)} 2a - a = 4 \rightarrow a = 4$$

حال از (I) و (II)، مقدار a را به دست می‌آوریم:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۵

پله اول: صورت کسر عددی مثبت است، برای آن که حاصل حد $+\infty$ شود، باید $x = \frac{\pi}{3}$ ، $\cos x = \frac{1}{2}$ ریشه مضاعف مخرج باشد، بنابراین داریم:

$$a \cos(x) - \sin^2(x) + b = a \cos(x) - (1 - \cos^2(x)) + b$$

$$\Rightarrow \cos^2(x) + a \cos(x) + b - 1 = \left(\cos(x) - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow \cos^2(x) + a \cos(x) + b - 1 = \cos^2(x) - \cos(x) + \frac{1}{4}$$

پله دوم: با مقایسه دو طرف تساوی بالا، مقدار a برابر -1 و مقدار b برابر $\frac{5}{4}$ است.

بنابراین حاصل $a + b$ برابر $-1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۶



کلید حل مسئله اینه که حاصل حد برابر بی نهایت شده، پس مخرج کسر صفرحدی است.

پله اول: با توجه به اینکه حاصل حد صورت $-\sqrt[3]{3}$ است، پس مخرج باید به سمت 0^- میل کند تا حاصل حد $+\infty$ شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{x-4}}{2-f((x-1)^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt[3]{3}}{2-f(-1^+)}$$

پله دوم: حال برای آنکه مخرج به سمت 0^- میل کند، باید $f(-1^+) = 2^+$ باشد که در گزینه یک، به درستی نشان داده شده است. دقت کنید که در گزینه ۳، حد راست به ازای (-1) ، مقدار مطلق ۲ می شود.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۷

$f(0)$ تعریف نمی شود، پس این تابع در $X=0$ ناپیوسته است.

همچنین نقاط $X=-1, 1, 2$ ممکن است نقاط ناپیوسته باشند.

طبق فرض، تابع f در $(-2, 3)$ فقط دو نقطه ناپیوسته دارد، به غیر از $X=0$ باید در یکی از نقاط مذکور ناپیوستگی داشته باشیم.

$$X=-1 \text{ در پیوستگی شرط: } \frac{a+1}{-3} = \frac{a+2}{-5} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$X=1 \text{ در پیوستگی شرط: } \frac{a+1}{3} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$X=2 \text{ در پیوستگی شرط: } \frac{a+4}{6} = \frac{a+2}{4} \Rightarrow a = 2$$

به ازای $a = \frac{1}{2}$ دو تا از نقاط پیوسته می شود و فقط یک نقطه ناپیوسته باقی می ماند که مطلوب سؤال است، پس $a = \frac{1}{2}$.

$$f(2) = \frac{4 + \frac{1}{2}}{6} = \frac{3}{4}$$

تابع به صورت $f(x) = \frac{x[x] + \frac{1}{2}}{x + 2[x]}$ درمی آید و در نقاط 0 و 2 ناپیوسته است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۸

ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{2[\lambda x] + \sin \lambda x \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 6x \right]}{\cos^2 x - \cos^2 x \cdot \sin^2 x - \sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{24}} \frac{2(1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos(\frac{\pi}{12})}$$

با توجه به اینکه $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ ، داریم:

$$\cos \frac{\pi}{6} = 2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

و در نهایت داریم:

$$\frac{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{4 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \times \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{(4\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2\sqrt{3} - 2})}{1}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۹

پله اول: چون حد مخرج تابع در همسایگی $x=1$ برابر صفر است و حاصل حد عددی حقیقی است، پس باید صورت هم در همسایگی $x=1$ برابر صفر شود (حالت $\frac{0}{0}$)، پس:

$$f^{-1}(1) - c = 0 \Rightarrow f(c) = 1 \Rightarrow \sqrt{c+b} - b = 1$$

پله دوم: حد تابع بعد از رفع ابهام برابر عدد ۲ شده پس:

$$f(x) = \sqrt{x+c} - b \Rightarrow f^{-1}(x) = (x+b)^2 - c; (x \geq -b)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - c}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+b)^2 - c - c}{x^2 + x - 2} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+b)}{2x+1} = 2 \Rightarrow \frac{2(1+b)}{3} = 2 \Rightarrow 1+b = 3 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c = 5$$

پس $f(x) = \sqrt{x+5} - 2$ است.

حاصل حد خواسته شده را می یابیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{2\sqrt{x+5}} = \frac{1}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰

پله اول:

$$f(x) = \frac{g(x)-1}{x^3-4x} = \frac{g(x)-1}{x(x-2)(x+2)} \Rightarrow g(x)-1 = ax(x-2) \Rightarrow g(x) = ax(x-2)+1$$

پله دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{1}{6} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax(x-2)}{(ax(x-2)+1)(x^3-4x)} = \frac{3a}{3(3a+1)} = \frac{1}{6} \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

پله سوم:

$$\rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x(x-2)+1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3}x^2(x-2)}{x^3-4x} = \frac{1}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۱

سرنخ

یادتون باشه بچه ها وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ ، x و $[x]$ هم ارزن؛ یعنی می تونیم به جای همدیگه ازشون استفاده کنیم حالا توی حد اول این کار رو انجام بدید و بعد حل سوال رو شروع کنید.

پله اول:

$$t = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - [6x]}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 6x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} - 3 = (-3)^+$$

پله دوم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow (-3)^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow (-3)^+} \frac{\left[\frac{1}{t} \right] - t}{t^2 + t} = \frac{\left[\frac{1}{(-3)^+} \right] - (-3)}{(-3)^2 + (-3)} = \frac{-1+3}{6} = \frac{1}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

حاصل حد بی نهایت شده پس مخرج دارای ریشه مضاعف است.

پله اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 3}{ax^2 + bx - 2} = -\infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 2^+ = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{ax^2 + bx - 2} = -\infty \\ x \rightarrow 2^- = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{ax^2 + bx - 2} = -\infty \end{cases} \Rightarrow y = ax^2 + bx - 2 \quad x = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{طول رأس سهمی} = 2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow 4a = -b \Rightarrow 4a + b = 0 \\ y(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0 \Rightarrow \overbrace{4a + b}^0 + b - 2 = 0 \Rightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \quad b = 2 \rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

پله دوم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-bx^2 + 3x + 2}{ax^2 + 2x - 1} = \frac{-bx^2}{ax^2} = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} = 4$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

در عبارت کسری داده شده صورت کسر را بر مخرج تقسیم کنید.

روش اول:

پله اول: ابتدا عبارت $x\sqrt{x} - 1$ را بر $a\sqrt{x} + 1$ تقسیم کرد. و عبارت ها را ساده می کنیم.

$$\begin{array}{r|l} \frac{x\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}+\frac{x}{a}} & \frac{a\sqrt{x}+1}{\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\sqrt{x}+\frac{1}{a^2}} \\ & \frac{-\frac{x}{a}-1}{-\frac{1}{a}x-\frac{1}{a^2}\sqrt{x}} \\ & \frac{\frac{1}{a^2}\sqrt{x}-1}{-\frac{1}{a^2}\sqrt{x}+\frac{1}{a^2}} \end{array}$$

$$-\frac{1}{a^2}-1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}-1}{a\sqrt{x}+1} - 2x + b\sqrt{x} + c = 4$$

پله دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a\sqrt{x}+1)\left(\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{x}}{a^2}+\frac{1}{a^2}\right)-\frac{1}{a^2}-1}{a\sqrt{x}+1} - 2x + b\sqrt{x} + c &= 4 \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{x}}{a^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{\frac{1}{a^2}+1}{a\sqrt{x}+1} - 2x + b\sqrt{x} + c \right) &= 4 \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\left(\frac{1}{a} - 2 \right) x + \left(\frac{-1}{a^2} + b \right) \sqrt{x} + \left(\frac{1}{a^2} + c \right) \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a^2}+1}{a\sqrt{x}+1} \right) &= 4 \end{aligned}$$

حاصل حد برابر ۴ شده، پس باید ضریب x و $\sqrt{x}$ برابر صفر شود.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - 2 = 0 &\rightarrow a = \frac{1}{2} & -\frac{1}{a^2} + b = 0 &\rightarrow b = \frac{1}{a^2} = 4 \\ \frac{1}{a^2} + c = 4 &\rightarrow c = 4 - \frac{1}{a^2} = 4 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4 - 4 = -4 \end{aligned}$$

بنابراین حاصل $a + b + c$ برابر $\frac{1}{2}$ است.

روش دوم:

پله اول: ابتدا از عبارت های داده شده مخرج مشترک می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}-1-2ax\sqrt{x}+abx+ac\sqrt{x}-2x+b\sqrt{x}+c}{a\sqrt{x}+1} = 4$$

پله دوم:

$$x\sqrt{x}-2ax\sqrt{x}=0 \rightarrow x\sqrt{x}(1-2a)=0 \rightarrow a=\frac{1}{2} \quad abx-2x=0 \rightarrow ab=2 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} b=4$$

$$\frac{ac\sqrt{x}+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}}=4 \rightarrow \frac{ac+b}{a}=4 \rightarrow \frac{c}{\frac{1}{2}}+4=4\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow C=-4$$

بنابراین حاصل $a + b + c = \frac{1}{2}$ است.

۴۴

سرنخ

در تابع $f(3-x)$ برای ساده‌سازی در صورت از x فاکتور بگیرید و مخرج را تجزیه کنید.

پله اول: ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(3-x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x^2 + x}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\sqrt{x(x^2 - 2x + 1)}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\sqrt{x}|x-1|}{(x-2)(x-1)}$$

پله دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x-1) = f(3^+ - 1) = f(2^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(3-x)$$

پس برای تابع $f(3-x)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(3-x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}|x-1|}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt{x}(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt{x}}{(x-2)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۵

تک پله: کسر داده شده را ساده می‌کنیم چون $x \rightarrow +\infty$ میل می‌کند، پس در توابع نمایی با توان‌های یکسان، عبارتی که پایه بزرگتری

دارد انتخاب می‌شود:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+2} - 3^{2x-1} + 4^x}{2^{2x+3} + 3^x - 4^{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \times 2^x - \frac{1}{3} \times 9^x + 4^x}{8 \times 4^x + 3^x - \frac{1}{4} \times 4^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3} \times 9^x}{(\frac{7}{4})4^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{3} \times 9^x}{\frac{7}{4} \times 4^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{9 \times 3} \times \left(\frac{9}{4}\right)^x = -\infty \end{aligned}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

در حدهای شامل قدر مطلق و جزء صحیح، قدر مطلق را تعیین علامت کرده و مقدار جزء صحیح را در نقطه مورد نظر قرار دهید، سپس حاصل حد را به دست آورید.

پله اول: وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، آنگاه عبارت $2 - \frac{1}{x}$ به سمت 2^+ میل می کند بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(2 - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + [x]|x| - 8}{x^2 - 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{2+4}{4+4+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

یا این که از hop استفاده می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 8} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 2}{3x^2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

اینجوری هم ببینید:

اگر $f(x) = \frac{x^2 - x + [x]}{1 - x\sqrt{x}}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ کدام است؟

جواب: $-\frac{2}{3}$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$P(1) = 0 \rightarrow 1 + a + b + 3 = 0 \rightarrow b = -4 - a$$

$$P(x) = x^4 + ax^3 + (-4 - a)x^2 + 3$$

$$P(x) = x^4 + ax^3 - ax^2 - 4x^2 + 3$$

$$P(x) = (x^4 - 4x^2 + 3) + (ax^3 - ax^2)$$

$$P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 3) + ax^2(x - 1)$$

$$P(x) = (x - 1)\underbrace{(x^2 + (a+1)x^2 - 3x - 3)}_{Q(x)}$$

از طرفی چون $P(x)$ بر $(x - 1)^2$ بخش پذیر است، پس $Q(x)$ نیز باید عامل $x - 1$ داشته باشد پس $Q(1) = 0$

$$Q(1) = 1 + a + 1 - 3 - 3 = 0 \rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -8 \quad P(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3 \quad P(2) = 16 + 32 - 32 + 3 = 19$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

اگر توابع f و g را به صورت روبه‌رو در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$f(x) = (x - k)(x - n)$$

$$g(x) = (x - b)(x - c)(x - d)$$

$$f : c(6, 2) = 15$$

اگر f, g فاقد عامل مشترک باشند:

$$g : c(4, 3) = 4 \rightarrow 15 \times 4 \times 3 = 180$$

$$a : c(3, 1) = 3$$

اگر f, g دارای یک عامل مشترک باشند:

$$c(6, 1) = 6 \text{ (عامل مشترک)}$$

$$f : c(5, 1) = 5$$

$$g : c(4, 2) = 6 \rightarrow 6 \times 5 \times 6 \times 4 = 720$$

$$a : c(4, 1) = 4$$

اگر f, g دارای دو عامل مشترک باشند:

$$c(6, 2) = 15 \text{ (عامل مشترک)}$$

$$f : 1$$

$$g : c(4, 2) \rightarrow 15 \times 1 \times 4 \times 5 = 300$$

$$a : c(5, 1) = 5$$

$$180 + 720 + 300 = 1200$$

محاسبه حالات مطلوب:

$$c(6, 2) \times c(6, 3) \times c(6, 1) = 15 \times 20 \times 6 = 1800$$

کل حالات:

و در نهایت احتمال برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1200}{1800} = \frac{2}{3}$$

در نظر داشته باشیم، آنچه که مهم است این است که a با ریشه‌های تابع g پس از ساده شدن عامل‌های مشترک، برابر نباشد. زیرا در این صورت باعث می‌شود که مخرج کسر صفر و حاصل حد بی‌نهایت شود.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{x^2 - 2a} - \sqrt{x^2 + a} \right) \times \frac{\sqrt{x^2 - 2a} + \sqrt{x^2 + a}}{\sqrt{x^2 - 2a} + \sqrt{x^2 + a}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(x^2 - 2a - x^2 - a)}{\sqrt{x^2 - 2a} + \sqrt{x^2 + a}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3ax}{|x| \left(\sqrt{1 - \frac{2a}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{a}{x^2}} \right)}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3ax}{x(1+1)} = \frac{-3a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3ax}{-x(1+1)} = \frac{3ax}{2x} = \frac{3a}{2} \end{cases} \rightarrow \text{اختلاف حد ها} = |3a| = 9 \rightarrow a = \pm 3$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۰

پله اول: ابتدا با استفاده از نمودار، ضابطه توابع f و g را یافته و آن‌ها را معکوس می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{r}{a}x + r \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{a}{r}x - a \\ g(x) = -\frac{r}{b}x + r \Rightarrow g^{-1}(x) = -\frac{b}{r}x + b \end{cases}$$

پله دوم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{\left(\frac{r}{a} + \frac{r}{b}\right)x}{\left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r}\right)x - a + b} = \lim_{x \rightarrow r^+} \frac{\left(\frac{r}{a} + \frac{r}{b}\right)x}{(x-r)\left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r}\right)} = \frac{\frac{r}{a} + \frac{r}{b}}{0^+ \left(\frac{a}{r} - \frac{b}{r}\right)} = -\infty \xrightarrow{a, b > 0} \begin{cases} \frac{r}{a} + \frac{r}{b} > 0 \\ \frac{a}{r} - \frac{b}{r} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} - \frac{b}{r} < 0 \Rightarrow a < b$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۱

با توجه به آن که صورت کسر $(x^2 - 4)$ در $x = 1$ برابر ۳- است، پس باید حد مخرج کسر برابر صفر باشد و تابع مخرج در همسایگی $x = 1$ تغییر علامت ندهد و با مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک شود.

$$(x \rightarrow 1 \Rightarrow x^2 + ax + b \rightarrow 0^+)$$

پس لازم است تابع مخرج دارای ریشه مضاعف ۱ باشد یعنی این تابع بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است:

$$x^2 + ax + b = (x-1)^2(x-\alpha) = (x^2 - 2x + 1)(x-\alpha)$$

جمله درجه صفر سمت چپ تساوی b و جمله درجه صفر سمت راست تساوی $-\alpha$ است، پس $b = -\alpha$ است در نتیجه:

$$x^2 + ax + b = (x^2 - 2x + 1)(x + b)$$

$$\rightarrow \text{سمت راست } x^2 \text{ ضریب } b - 2 = 0 \rightarrow b = 2$$

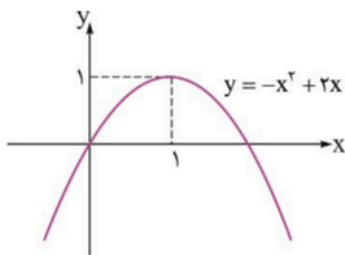
$$\rightarrow x^2 + ax + 2 = (x^2 - 2x + 1)(x + 2)$$

از طرفی ریشه مخرج $x = 1$ است، پس $a = -3$

$$\rightarrow a + b = -1$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۲

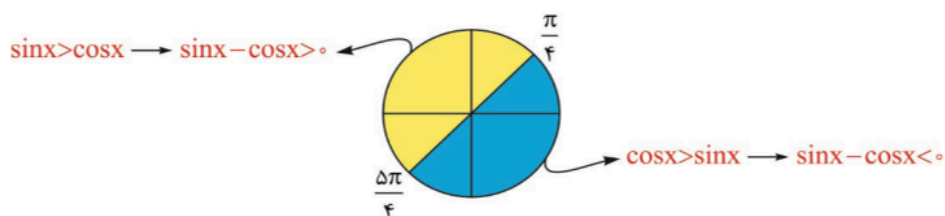


$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(-x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۳

می‌دانیم $\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$ است و در دایره مثلثاتی داریم:

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\left[\tan x - \frac{1}{\tan x} \right]}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{[\tan x - \cot x]}{\sin x - \cos x}$$

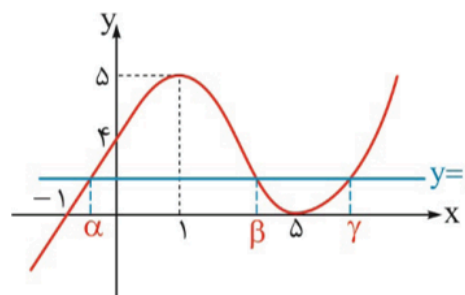
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{[-2 \cot 2x]}{\sin x - \cos x} = \frac{\left[-2 \cot \frac{\pi^-}{2} \right]}{\sin \frac{\pi^-}{4} - \cos \frac{\pi^-}{4}} = \frac{[-2(0^+)]}{0^- - 0^-} = \frac{[0^-]}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۴

تابع $f(x)$ در تمام نقاط دامنه اش دارای حد و همچنین پیوسته است. تابع کسری $y = \frac{f(x)-1}{(f \circ f)(x)-1}$ در ریشه‌های مخرج ناپیوسته است، پس:

$$(f \circ f)(x) = 1 \rightarrow f(f(x)) = 1 \rightarrow \begin{cases} f(x) = \alpha \xrightarrow{-1 < \alpha < 0} \text{ریشه ۱} \\ f(x) = \beta \xrightarrow{1 < \beta < 5} \text{ریشه ۳} \\ f(x) = \gamma \xrightarrow{\gamma > 5} \text{ریشه ۱} \end{cases}$$



بنابراین مخرج این کسر دارای ۵ ریشه است و در نتیجه ۵ نقطه ناپیوستگی وجود دارد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۵

می‌دانیم $\pi \approx 3.14$ است، پس $1 < \frac{\pi}{6} < 2$ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \frac{a + 2[-x]}{1 - 2\sin x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \frac{a + 2(-1)}{1 - 2\sin x} = \frac{a - 2}{1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^+} = \frac{a - 2}{0^-} = -\infty \rightarrow a - 2 > 0 \rightarrow a > 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{x}{a} + x \right] = \left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{2} \right]$$

$$a > 2 \rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{2} \rightarrow 0 < \frac{1}{2a} < \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2a} + \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

پس داخل جزء صحیح عددی در محدوده $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ است که داریم:

$$\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{2} \right] = 0$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۶

تعداد راه‌های انتخاب دو عدد a و b از مجموعه $\{1, 2, \dots, 10\}$ برابر است با: $\binom{10}{2} = 45$. اگر چند جمله‌ای موردنظر بر $X + 1$ بخش پذیر

$$-1 + a - b - 1 = 0 \Rightarrow a = b + 2$$

باشد، مقدارش به ازای $X = -1$ برابر صفر است:

$$(3, 1)(4, 2)(5, 3)(6, 4)(7, 5)(8, 6)(9, 7)(10, 8)$$

بنابراین (a, b) یکی از هشت زوج زیر است:

در نتیجه احتمال موردنظر برابر $\frac{8}{45}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۵۷

ضابطه $f(x)$ را بازنویسی می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{3x^3 - 4x}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{3x^3 - 4x}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$$

حد این تابع در $-\infty$ برابر ۳ است ولی باید متوجه شویم که از مقادیر بیشتر یا کمتر از ۳ به آن نزدیک می‌شویم.

$$\frac{3x^3 - 4x}{3x^3 - 3x^2 - 15x - 9} \left| \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{3} \right. \Rightarrow f(x) = 3 + \frac{3x^2 + 11x + 9}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{3}{x} \right) = 3 + 0^- = 3^-$$

اکنون به محاسبه حد خواسته شده می‌پردازیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^3 - 4x}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{81 - 12}{0^- \times 16} = -\infty$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

معادله $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل می‌کنیم.

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1 = \frac{1}{2}(2\sin x + 2)(2\sin x - 1) = (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow x = \pi \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \end{cases}$$

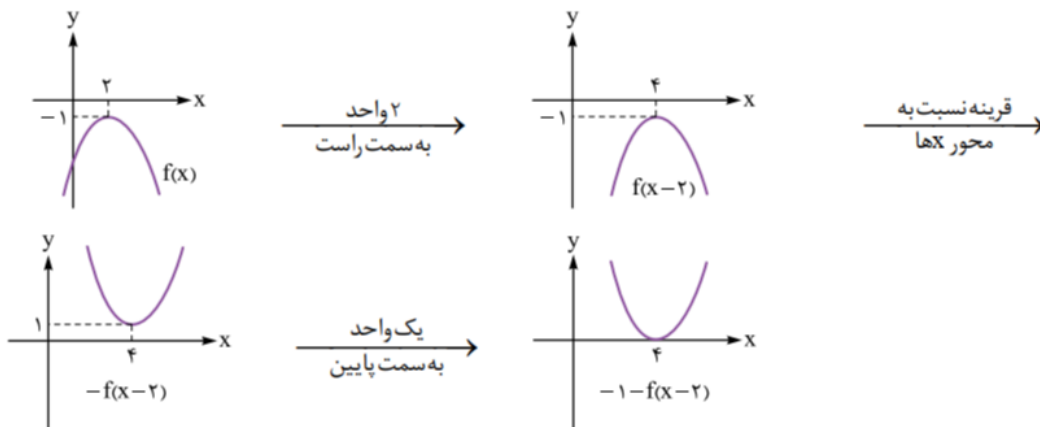
ریشه $x = \pi$ مضاعف است و در همسایگی محذوف آن حد تابع $-\infty$ است.در همسایگی راست ریشه $x = \frac{\pi}{6}$ حد تابع $+\infty$ است و در همسایگی راست ریشه $x = \frac{5\pi}{6}$ حد تابع $-\infty$ است. بنابراین تنها جواب قابل قبول برایa در بازه اشاره شده $\frac{\pi}{6}$ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی گام اول: از آنجایی که $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{a - f(x+b)} = +\infty$ است، باید حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 4$ است برابر با 0^+ باشد. چون

$y = a - f(x+b)$ تابع درجه دوم است؛ پس نمودار آن باید به صورت  باشد.

گام دوم: از انتقال نمودار تابع f در صورت سؤال می‌خواهیم به نمودار گام اول برسیم.

از مقایسه $-1-f(x-2)$ با $a-f(x+b)$ ، نتیجه می‌گیریم $a = -1$ و $b = -2$ ؛ پس $a+b = -3$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

پاسخ تشریحی

گام اول: می‌خواهیم نمودار تابع را رسم کنیم ولی اول باید ضابطه آن را تا حد امکان ساده کنیم. ابتدا شرط مرز ضابطه‌ها را مشخص می‌کنیم. توجه کنید که:

$$|x^3| \leq x^2 \xrightarrow{\div x^2} |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \quad (\text{برای } x=0 \text{ هم برقرار است.})$$

$$|x^3| > x^2 \xrightarrow{\div x^2} |x| > 1 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1$$

در نتیجه:

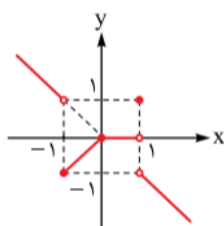
$$f(x) = \begin{cases} |x| \cdot [x] & ; -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}{1 - x^2} & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

گام دوم: باید $[x]$ را تعیین مقدار کنیم. محدوده $-1 \leq x \leq 1$ را به دو محدوده $-1 \leq x < 0$ ، $0 \leq x < 1$ و $x=1$ تبدیل می‌کنیم تا $[x]$ در آن‌ها به ترتیب مقدار -1 ، 0 و 1 داشته باشد. همچنین عبارت $x^4 - 2x^2 + 1$ در زیر رادیکال را می‌توانیم به صورت مربع کامل $(x^2 - 1)^2$ بنویسیم؛ در نتیجه $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = |x^2 - 1|$ می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} -|x| & ; -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ \frac{x|x^2 - 1|}{1 - x^2} & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

گام سوم: در محدوده $-1 \leq x < 0$ ، $|x| = -x$ است. همچنین در محدوده‌های $x < -1$ یا $x > 1$ ، مقدار $x^2 - 1 < 0$ است، پس $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ است؛ پس تابع به فرم زیر ساده می‌شود و نمودار آن را می‌توانیم رسم کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x & ; -1 \leq x < 0 \\ 0 & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ \frac{x(x^2 - 1)}{1 - x^2} = -x & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$



گام چهارم: مطابق نمودار تابع f ، این تابع در $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته است و در این دو نقطه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0} = \text{صفر مطلق} \quad \text{ناموجود.}$$

پس هیچ مقداری برای a با شرایط فوق وجود ندارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(-x) \xrightarrow{-x=t} \lim_{t \rightarrow (-2)^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow (-2)^-} (t^2 + mt) = 4 - 2m \quad \text{توجه کنید که:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(3x - 4) \xrightarrow{3x-4=t} \lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} (mt^2 + 3) = 4m + 3$$

$$4 - 2m = 4m + 3 \Rightarrow 6m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{6} \quad \text{چون تابع } f \circ g \text{ در } x=2 \text{ حد دارد، پس:}$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = f(6) = 6^2 + 6m = 36 + 1 = 37 \quad \text{بنابراین:}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۲

فرض می‌کنیم $\sqrt[3]{1+3x} = t$ ، در این صورت، $x = \frac{t^3 - 1}{3}$.

اگر $x \rightarrow 0$ ، آن‌گاه $t \rightarrow 1$ و حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$h = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \sqrt{1 + 2\left(\frac{t^3 - 1}{3}\right)}}{\left(\frac{t^3 - 1}{3}\right)^n} \xrightarrow{\text{ضرب در مزدوج صورت}} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1 - 2\left(\frac{t^3 - 1}{3}\right)}{\left(\frac{t^3 - 1}{3}\right)^n} \times \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t + \sqrt{1 + 2\left(\frac{t^3 - 1}{3}\right)}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-2t^2 + 2t^3 - 1}{3(t-1)^n} \times \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\left(\frac{t^3 - 1}{3}\right)^n} \times \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 0}}$$

برای این که حد بالا وجود داشته باشد، باید $n - 2 \leq 0$ و در نتیجه $n \leq 2$.

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)^2(-2t-1)}{3(t-1)^n} \times \frac{1}{\left(\frac{3}{3}\right)^n \times 3} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{-2t-1}{(t-1)^{n-2}}$$

توجه کنید که اگر $n = 1$ ، آن‌گاه $h = 0$ ، اگر $n = 2$ ، آن‌گاه $h = \frac{-1}{3}$ و اگر $n > 2$ ، آن‌گاه حد تابع f در $x = 0$ نامتناهی است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۳

حد تابع f در $x = 1$ برابر ۲- است. چون حد مخرج $f(x)$ در این نقطه برابر صفر است، پس حد صورت آن هم باید صفر باشد. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax^2 + bx + 1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax^2 - (a+2)x + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) + ax^2 - (a+2)x + 2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + (x-1)(ax - 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1 + ax - 2)$$

$$= 1 + a = -2 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 3x^2 + x + 1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{x-1} = x^2 - 2x - 1, \quad x \neq 1$$

از طرف دیگر، چون $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ، پس اگر $x \rightarrow c^-$ ، آن‌گاه $f(x) \rightarrow 0^+$ ، پس با توجه به نمودار تابع f ، باید c صفر تابع f باشد و $c < 0$. پس:

$$c^2 - 2c - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 1 + \sqrt{2} \text{ غ ق ق} \\ c = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

دامنه تابع را معین می‌کنیم:

۶۴

$$1) 4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(4 - x^2) \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \text{ یا } 0 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [0, 2]$$

$$2) x^2 - 2x^2 - 4x + 12 \geq 0 \Rightarrow (x^2 - 4x) - (2x^2 - 12) \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) - 2(x^2 - 4) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x - 2) \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \text{ یا } x \geq 3$$

$$\Rightarrow D_g = [-2, 2] \cup [3, +\infty)$$

$$D_h = D_f \cap D_g - \{x | (f - g)(x) = 0\} = [-2, 2] \cup \{-2\} - \{x | f(x) = g(x)\}$$

اکنون حالاتی را که $f(x) = g(x)$ است، حساب می‌کنیم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 4x - x^2 = x^2 - 2x^2 - 4x + 12 \Rightarrow 2x^2 - 2x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = \pm 2, x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow D_h = [-2, 2] - \{\frac{3}{2}\}$$

بنابراین تابع h در نقطه $x = 0$ حد چپ ندارد و در نتیجه در این نقطه حد ندارد.همچنین در $x = \frac{3}{2}$ حد مخرج کسر $h(x)$ برابر صفر و حد صورت آن برابر یک است، پس حد h در این نقطه نامتناهی است.

توجه کنید که در این حالت هم تابع حد ندارد.

اما نقطه $x = \frac{3}{2}$ در دامنه تابع نیست. بنابراین تابع در ۱ نقطه از دامنه، حد ندارد و در ۱ نقطه حد نامتناهی دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

توجه کنید که:

۶۵

برای اینکه بفهمیم در $x \rightarrow +\infty$ ، تابع از چپ به ۱ میل می‌کند یا از راست، باید $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1)$ را حساب کنیم و ببینیم که به 0^+ میل می‌کند یا 0^- :

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - 4x + 2} - 1 = \frac{\cancel{2x^2} + x - 3 - \cancel{2x^2} + 4x - 2}{2x^2 - 4x + 2} = \frac{5x - 5}{2x^2 - 4x + 2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 5}{2x^2 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2x} = 0^+$$

پس اگر $x \rightarrow +\infty$ ، آن‌گاه $(f(x) - 1) \rightarrow 0^+$ و در نتیجه: $f(x) \rightarrow 1^+$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) \stackrel{t=f(x)}{=} \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t)$$

بنابراین:

$$= \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{2t^2 + t - 3}{2t^2 - 4t + 2} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(t-1)(2t+3)}{2(t-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{2t+3}{2(t-1)} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۶

توجه کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + mx + n}{x^2 - 3x + 2} - 2 = \frac{2x^2 + mx + n - 2x^2 + 6x - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(m+6)x + n - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

از طرف دیگر طبق توضیحات پاسخ قبلی:

برای اینکه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = 1$ باید در $+\infty$ و $-\infty$ مقادیر $f(x)$ کمتر از ۲ باشند، پس $f(x) - 2 < 0$. چون علامت $x^2 - 3x + 2$

در $+\infty$ و $-\infty$ مثبت است، پس، در هر دو حالت $x \rightarrow +\infty$ و $x \rightarrow -\infty$ باید:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (m+6)x + n - 4 < 0 &\Rightarrow m+6 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (m+6)x + n - 4 < 0 &\Rightarrow m+6 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m+6 = 0 \text{ بنابراین } n-4 < 0 \Rightarrow m = -6, n < 4 \Rightarrow m+n < -2$$

پس: $n \in (-\infty, -2)$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۷

توجه کنید که:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

بنابراین می‌خواهیم نمودار تابع f در $+\infty$ و $-\infty$ بالاتر از خط $y = 2$ واقع شود. یعنی $f(x) - 2 > 0$. از طرف دیگر:

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + |x|}{x^2 + mx + 2} - 2 = \frac{|x| - 2mx - 4}{x^2 + mx + 2}$$

عبارت $x^2 + mx + 2$ در $+\infty$ و $-\infty$ مقداری مثبت دارد. پس عبارت $|x| - 2mx - 4$ هم باید مثبت باشد.

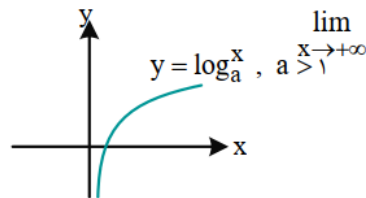
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| - 2mx - 4 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2m)x - 4 > 0 \Rightarrow 1-2m > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| - 2mx - 4 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1-2m)x - 4 > 0 \Rightarrow -1-2m < 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}$$

پس اگر $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ نمودار تابع f به صورت داده شده خواهد بود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۸

توجه کنید که اگر $a > 1$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ 

از طرف دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a^x + k \log_a^{x+1}}{\log_a^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} \log_a^x + k \log_a^{x+1}}{\log_a^x \log_a^2 + 2}$$

اگر فرض کنیم $t = \log_a^x$ ، آن‌گاه اگر $x \rightarrow +\infty$ داریم $t \rightarrow +\infty$ و حد مورد نظر به صورت زیر در می‌آید:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{t} + kt + 1}{\log_a^2 t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(k + \frac{1}{t})t}{\log_a^2 t} = \frac{2k+1}{2 \log_a^2}$$

$$\frac{2k+1}{2 \log_a^2} = 2 \Rightarrow 2k+1 = 4 \log_a^2 \Rightarrow 2k = \log_a^{16} - 1$$

بنابراین:

$$2k = \log_a^{16} - 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \log_a^{16} \Rightarrow k = \log_a^{\frac{16}{2}} \Rightarrow 2^k = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۹

توجه کنید که:

$$f(2) = \frac{2a^2 - 2a}{-4 + 4a} = \frac{2a(a-1)}{4(a-1)} = \frac{a}{2}, \quad a \neq 1 \quad \text{اگر } a=1 \Rightarrow f(2) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2a^2 - 2a}{-4 + 2ax} = \begin{cases} \frac{a(2a-2)}{2(2a-2)} = \frac{a}{2}, & a \neq \frac{2}{2} \\ \cdot, & a = \frac{2}{2} \end{cases}$$

بنابراین، اگر $a \notin \left\{1, \frac{2}{2}, 2\right\}$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{a^2 - 2a}{-4 + ax} = \begin{cases} \frac{a(a-2)}{2(a-2)} = \frac{a}{2}, & a \neq 2 \\ \cdot, & a = 2 \end{cases}$$

$$\text{آن گاه } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{a}{2}$$

تابع f در نقطه $x=2$ پیوسته است. اگر $a \in \left\{1, \frac{2}{2}, 2\right\}$ ، مقادیر $f(2)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ هر سه یکسان نیستند و تابع f در $x=2$ پیوسته نیست.پس مجموع مقادیر ممکن برای این منظور برابر $\frac{6}{2} + 2 = 1 + \frac{2}{2}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

بنابراین:

۷۰

$$2x^2 + ax + 1: \Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \text{ غلط} \\ a = -4 \text{ صحیح} \end{cases}$$

ریشه مضاعف مخرج $-\frac{a}{8}$ می باشد و چون این ریشه مثبت است در نتیجه $a < 0$ خواهد بود.

$$f(x) = \frac{-4x+1}{2x^2-4x+1} = \frac{-4x+1}{(2x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{f(x-\frac{1}{2})} = \frac{f(1^+)}{f(\frac{1}{2}^+)} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

طبق قضیه پرتوان داریم:

۷۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + \sqrt{9x^2 - 3x}}{bx - 1} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + |3x|}{bx} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - 3x}{bx} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-3)x}{bx} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{a-3}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{bx + \left|\frac{3}{2}x - 2\right|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{bx + \frac{3}{2}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(b+\frac{3}{2})x} = \frac{a}{b+\frac{3}{2}} = \frac{2b+3}{b+\frac{3}{2}} = 2$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۲

ابتدا حد چپ تابع f را در $x=1$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(1+a \sin x) = f(1^-) = 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+1} = 2 \Rightarrow \sqrt{b} = -\frac{1}{2} \text{ غقی}$$

اگر $a > 0$ باشد، آن‌گاه:نتیجه می‌گیریم $a < 0$ است.حال حد راست تابع f را در $x=1$ به دست می‌آوریم. حد مخرج کسر برابر صفر است. بنابراین حد صورت نیز باید صفر شود و

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = -1 \text{ در نتیجه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1$$

خواهیم داشت: $a+b=0$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

بررسی گزینه‌ها:

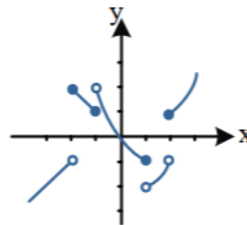
۷۳

$$\begin{cases} fof(-2^+) = f(2^-) = -1 \\ fof(-2) = f(2) = 1 \end{cases} \quad \times$$

$$\begin{cases} fof(-1^+) = f(1^-) = -1 \\ fof(-1) = f(1) = -1 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} fof(1^+) = f(-2^+) = 2 \\ fof(1) = f(-1) = 1 \end{cases} \quad \times$$

$$\begin{cases} fof(2^+) = f(1^+) = -2 \\ fof(2) = f(1) = -1 \end{cases} \quad \times$$



۱

۲

۳

۴

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

نکته: اگر در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم $P(a) = Q(a) = 0$ ، در این صورت $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند. ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون

تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

در عبارت $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$ ، چون حد مخرج برابر صفر است و حاصل حد متناهی شده است، پس باید حد صورت هم برابر صفر باشد، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0 \Rightarrow 4 + 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a - 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4 + ax - 2a}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2) + a(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2+a)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2+a}{x+1} = \frac{a+4}{3} \end{aligned}$$

طبق فرض این مقدار برابر ۲ است، پس:

$$\frac{a+4}{3} = 2 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{b=-2a-4} b = -8 \Rightarrow a-b = 10$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۵

نکته: تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه در هر نقطه از بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد.

پیوستگی راست تابع در $x = 3$ و پیوستگی تابع در نقاط صحیح بعد از $x = 3$ را بررسی می‌کنیم:

$$x = 3: \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \left[3^+ \right] - \left[\frac{3}{2} \right] = 3 - 1 = 2, \quad f(3) = 2$$

تابع f در $x = 3$ از راست پیوسته است.

$$x = 4: \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \left[4^+ \right] - \left[2^+ \right] = 4 - 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \left[4^- \right] - \left[2^- \right] = 3 - 1 = 2 \end{cases}, \quad f(4) = 2$$

تابع f در $x = 4$ پیوسته است.

$$x = 5: \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \left[5^- \right] - \left[\frac{5}{2} \right] = 4 - 2 = 2, \quad f(5) = \left[5 \right] - \left[\frac{5}{2} \right] = 3$$

پس تابع f در $x = 5$ پیوستگی چپ ندارد. بنابراین حداکثر مقدار k برابر ۵ است.

بدیهی است تابع $f(x) = \left[x \right] - \left[\frac{x}{2} \right]$ در تمام نقاط غیر صحیح بازه $(3, 5)$ پیوسته است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۶

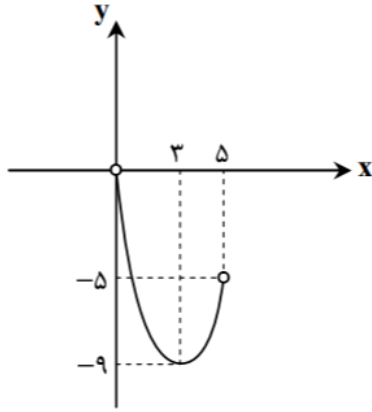
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(-g \circ f(x))}{\left[\left(\frac{1}{2} g^2(x) - 2g(x) + 2 \right) f(x) \right]} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(-g(f(x)))}{\left[\frac{1}{2} (g(x) - 2)^2 f(x) \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(-g(\circ^-))}{\left[\frac{1}{2} (\circ^+) (\circ^-) \right]} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(-(\circ^-))}{[\circ]^-} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(\circ^+)}{-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty \end{aligned}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۷

می‌دانیم تابع $y = [x^2 - 6x]$ ممکن است در نقاطی که حاصل عبارت $x^2 - 6x$ برابر عددی صحیح است، ناپیوسته باشد.

رأس سهمی $y = x^2 - 6x$ ، نقطه $(3, -9)$ بوده و نمودار آن با دامنه $(0, 5)$ مطابق شکل روبه‌رو است:



بنابراین حاصل عبارت $y = x^2 - 6x$ با دامنه $(0, 3]$ ، شامل اعداد صحیح $\{-1, -2, \dots, -8, -9\}$ و با دامنه $(3, 5)$ ، شامل اعداد صحیح $\{-6, -7, -8\}$ است.

در تمامی نقاط با این عرض‌ها، تابع $y = [x^2 - 6x]$ ناپیوسته است، به‌جز نقطه رأس سهمی، یعنی $(3, -9)$ ؛ زیرا حد راست و چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر -9 است. در سایر نقاط با عرض صحیح، اختلاف حد راست و چپ برابر 1 است. پس تابع $y = [x^2 - 6x]$ $11 = 8 + 3$ نقطه ناپیوستگی در بازه $(0, 5)$ دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۸

حاصل حد برابر $+\infty$ است، پس $x = -1$ ، ریشه مخرج کسر $\frac{a + b(-1)^{[x]}}{2x^2 - 2x - a}$ است:

$$2x^2 - 2x - a = 0 \xrightarrow{x=-1} 2 + 2 - a = 0 \Rightarrow a = 4$$

اکنون حد راست و چپ تابع را در $x = -1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4 + b(-1)^{[x]}}{2x^2 - 2x - 4} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4 + b(-1)^{-2}}{2(x+1)(x-2)} = \frac{4+b}{2(0^-)(-3)} = \frac{4+b}{0^+} = +\infty$$

$$4+b > 0 \Rightarrow b > -4 \quad (1) \qquad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4 + b(-1)^{[x]}}{2x^2 - 2x - 4} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4 + b(-1)^{-1}}{2(x+1)(x-2)} = \frac{4-b}{2(0^+)(-3)} = \frac{4-b}{0^-} = +\infty$$

$$4-b < 0 \Rightarrow b > 4 \quad (2) \qquad (1) \cap (2) \Rightarrow b > 4$$

بنابراین:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۷۹

نکته: تابع $f(x) = [x]$ در نقاطی که $x \in \mathbb{Z}$ باشد ناپیوسته است.

به ازای $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ عبارت داخل جزء صحیح، یعنی $2 \sin x$ عددی صحیح می‌شود. تابع در تمامی این اعداد به جز $x = \frac{3\pi}{2}$ ناپیوسته است؛ زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} [2 \sin x] = [-2^+] = -2 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} [2 \sin x] = [-2^+] = -2 \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = [-2] = -2$$

در سایر نقاط حد راست و چپ یک واحد اختلاف دارند. مجموع طول ۶ نقطه ناپیوستگی برابر است با:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} + \pi + \frac{7\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{2} + \pi + 3\pi = \frac{11\pi}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۸۰

نکته: فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. در این صورت اگر $L < 0$ و g در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

این حکم برای حد چپ و راست هم برقرار است.

ابتدا حد صورت و مخرج را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} (x - \sqrt{x^2 - 72}) = -3 - \sqrt{9 - 72} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} (9 - x^2) = 9 - (-3)^2 = 9 - 9 = 0$$

بنابراین حد صورت برابر عددی منفی و حد مخرج برابر صفر است. با توجه به اینکه $x \rightarrow (-3)^-$ (یعنی x در همسایگی چپ -3 قرار دارد)

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x - \sqrt{x^2 - 72}}{9 - x^2} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

عبارت $(3-x)(3+x) = 9-x^2$ عبارتی منفی است؛ پس:

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۸۱

اگر $x \rightarrow (\frac{3}{4})^+$ ، آن‌گاه حد مخرج کسر برابر صفر است، چون حاصل حد موجود است، پس باید حد صورت هم صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{4})^+} |8x^2 - 2x - 3| = 0 \rightarrow \left| \frac{9}{16}a - \frac{3}{2} - 3 \right| = 0 \rightarrow a = 8$$

برای محاسبه حد لازم است عبارت‌های صورت و مخرج را تعیین علامت کنیم و قدر مطلق‌ها را برداریم:

$$8x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} : \left(\frac{3}{4}\right)(x_2) = \frac{-3}{8}$$

$$\rightarrow x_2 = \frac{-1}{2} \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & -1 & 3 & \\ \hline & + & - & + \end{array}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)(x_2) = \frac{6}{4} \rightarrow x_2 = 2 \quad \begin{array}{c|c|c|c} x & 3 & 2 & \\ \hline & + & - & + \end{array}$$

با توجه به جدول تعیین علامت و اینکه $x \rightarrow (\frac{3}{4})^+$ ، عبارت داخل قدر مطلق صورت، مثبت و عبارت مخرج، منفی می‌باشد. در ادامه پس از رفع ابهام حاصل حد را می‌یابیم:

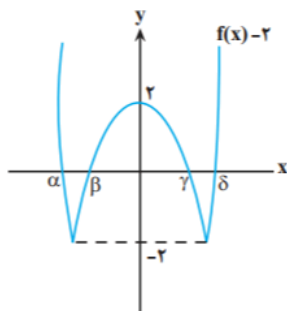
$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3}{4})^+} \frac{|8x^2 - 2x - 3|}{4x^2 - 11x + 6} = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{4})^+} \frac{8(x - \frac{3}{4})(x + \frac{1}{2})}{-4(x - \frac{3}{4})(x - 2)} = \frac{8(\frac{3}{4} + \frac{1}{2})}{-4(\frac{3}{4} - 2)} = 2$$

بنابراین $b = 2$ و $a + b = 10$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۲

$f(x) - 2$ چهار ریشه دارد که در همسایگی تمام آنها $f(x) - 1$ عددی مثبت (حدود ۱) است پس باید دنبال حد راست مثبت $f(x) - 2$ در $x = a$ باشیم که در دو ریشه همچنین حالتی رخ می‌دهد.



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۳

ریشه مشترک دو معادله $x^2 + ax + b = 0$ و $x^2 + bx + a = 0$ را می‌یابیم.

$$x^2 + ax + b = x^2 + bx + a \rightarrow ax + b = bx + a \rightarrow (a - b)x = a - b$$

با شرط $a \neq b$ ریشه مشترک دو تابع فقط $x = 1$ است.

برای اینکه تساوی حدی برقرار باشد باید یکی از معادله‌ها ریشه مضاعف $x = 2$ داشته باشد.

$$x^2 + ax + b = (x - 2)^2 \rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 4x + 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

در این صورت کسر به صورت زیر در می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2 (x^2 + 4x - 4)} = \frac{1}{0^+ (\lambda)} = +\infty$$

$$x^2 + bx + a = (x - 2)^2 \rightarrow x^2 + bx + a = x^2 - 4x + 4 \rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

در این صورت حد به صورت زیر در می‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x^2 + 4x - 4)(x - 2)^2} = \frac{1}{\lambda (0^+)} = +\infty$$

در حالتی که a و b برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x^2 + ax + a)(x^2 + ax + a)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x^2 + ax + a)^2}$$

کافی است به ازای $x = 2$ مخرج صفر شود.

$$2^2 + 2a + a = 0 \rightarrow a = \frac{-4}{3} \rightarrow b = \frac{-4}{3} \Rightarrow a + b = \frac{-8}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۴

می‌دانیم $[x]$ در تمام نقاط صحیح فاقد حد است. اما در نقاطی که ضریب براکت صفر باشد دارای حد خواهد بود. پس:

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

که مجموع مقادیر برابر صفر می‌باشد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۵

تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است:

$$y(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

ضمناً می‌دانیم طبق شکل $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ است، پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2}} = 3 \rightarrow \frac{ax}{x} = 3 \rightarrow a = 3$$

$$\text{پس: } b - 2a = 0 - 2 \times 3 = -6$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۶

اگر تابع f در $x=a$ ناپیوسته باشد، پس $x=a$ ریشهٔ مخرج است.

$$3x^2 + 7x - 6 = 0 \rightarrow (3x-2)(x+3) = 0 \rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ یا } x = -3$$

بنابراین a می‌تواند -3 یا $\frac{2}{3}$ باشد.حاصل حد عدد حقیقی است، پس با یک حد صفر صفرم روبه‌رو می‌شویم. از طرف دیگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ است، یعنی بعد از حذف عامل $(x-a)$ از صورت و مخرجحاصل حد برابر صفر است. بنابراین صورت کسر دارای ریشهٔ مضاعف $x=a$ و عامل $(x-a)^2$ می‌باشد:

$$1) \quad a = -3 \rightarrow \text{صورت: } m(x+3)^2 = mx^2 + 6mx + 9m$$

از مقایسهٔ عبارت بالا با عبارت $mx^2 - 12x + n$ واضح است که $6m = -12$ و $m = -2$ است. همچنین $n = 9m$ است:

$$n = 9m = 9 \times (-2) = -18 \rightarrow m + n = -20$$

$$2) \quad a = \frac{2}{3} \rightarrow \text{صورت: } m(x - \frac{2}{3})^2 = mx^2 - \frac{4}{3}mx + \frac{4}{9}m$$

مشابه حالت قبل، در مقایسه با عبارت $mx^2 - 12x + n$ داریم:

$$-\frac{4}{3}m = -12 \rightarrow m = 9 \rightarrow n = \frac{4}{9}m = 4 \rightarrow m + n = 13$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sin^2 x] = [0^+] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} [-\sin^2 x] = [0^-] = -0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x} = -2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۷

باتوجه به اینکه $x \rightarrow +\infty$ لذا از جمله بزرگتر (پایه بیشتر) فاکتور می‌گیریم.

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow -x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{-x}(1 + (\frac{5}{3})^{-x})}{3^{-x}(3 + 5(\frac{5}{3})^{-x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + (\frac{5}{3})^{-x}}{3 + 5(\frac{5}{3})^{-x}} \approx \frac{1}{3}$$

چون $-x \rightarrow -\infty$ لذا $(\frac{5}{3})^{-x} \rightarrow (\frac{5}{3})^{-\infty}$ یا همان $(\frac{3}{5})^{+\infty}$ که برابر صفر می‌شود.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{\frac{9x-1}{x+1}} - 3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\frac{9x-1}{x+1} - 9}{\sqrt{\frac{9x-1}{x+1}} + 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \frac{\frac{-10}{x+1}}{\sqrt{\frac{9x-1}{x+1}} + 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-10x}{x+1}}{\sqrt{\frac{9x-1}{x+1}} + 3} \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-10x}{x}}{\sqrt{\frac{9x}{x}} + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-10}{3+3} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۸۹

در حد تابع اول، مخرج به ازای $x=1$ برابر صفر می‌شود. پس صورت هم باید به ازای $x=1$ صفر شود.

$$\Rightarrow 2 + 2^{a-1} - 6 = 0 \Rightarrow 2^{a-1} = 4 \Rightarrow a-1 = 2 \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x + 2^{3-x} - 6}{2^{x-1} - 1} = 0 \xrightarrow{\substack{2^x = t \\ \begin{cases} x \rightarrow 1 \\ t \rightarrow 2 \end{cases}}} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t + \frac{8}{t} - 6}{\frac{t}{2} - 1} \xrightarrow[\text{ضرب در } t]{\text{صورت و مخرج}} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 6t + 8}{\frac{t^2}{2} - t} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{2(t-2)(t-4)}{t(t-2)} = -2 \Rightarrow b = -2$$

$$\text{بنابراین: } \lim_{x \rightarrow b} \frac{\sqrt{x+a+2}+b}{x^3-b^3} \stackrel{a=3}{=} \lim_{b=-2, x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x^3+8} \times \frac{\sqrt{x+6}+2}{\sqrt{x+6}+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)(\sqrt{x+6}+2)} = \frac{1}{48}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۰

در $x = n \in \mathbb{Z}$ داریم:

۹۱

$$f(x) = \frac{-n+1}{(-n)^{\gamma+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \frac{-n+1}{(-n)^{\gamma+1}}, \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \frac{-n-1+1}{(-n-1)^{\gamma+1}}$$

$$\frac{-n+1}{n^{\gamma+1}} = \frac{-n}{n^{\gamma+2n+2}}$$

پس شرط پیوستگی این است که:

$$\Rightarrow (-n+1)(n^{\gamma+2n+2}) = -n(n^{\gamma+1}) \Rightarrow -n^{\gamma} - 2n^{\gamma} - 2n + n^{\gamma} + 2n + 2 = -n^{\gamma} - n \Rightarrow 0 = n^{\gamma} - n - 2 \quad n = -1 \text{ یا } n = 2$$

پس:

و دو نقطه مورد نظر $A(2, \frac{-1}{\delta})$ و $B(-1, 1)$ هستند.

$$AB = \sqrt{(-1-2)^{\gamma} + (1 - \frac{-1}{\delta})^{\gamma}} = \sqrt{9 + \frac{36}{2\delta}} = \sqrt{\frac{261}{2\delta}} = \frac{\sqrt{261}}{\delta}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

با توجه به اینکه می‌دانیم $f(\frac{x+1}{x-1}) = f(\frac{x-1+2}{x-1}) = f(1 + \frac{2}{x-1})$ لذا داریم:

۹۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(1 + \frac{2}{x-1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(\frac{x+1}{x-1})$$

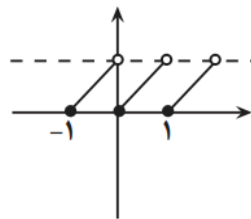
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\frac{4x+9}{x+2}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\frac{4x+8+1}{x+2}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [4 + \frac{1}{x+2}] = [4 + 0^-] = [4^-] = 3$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

f در نقاط $k \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است پس باید وضعیت تابع $y = g(f(x))$ را در این نقاط بررسی کنیم.

۹۳

$$y = g(f(x)) = [\cos \frac{\pi}{\gamma} (x - [x])] \begin{cases} k^+ : [(\cos \frac{\pi}{\gamma} (0^+))] = 0 \\ k^- : [(\cos \frac{\pi}{\gamma} (1^-))] = 0 \\ k = [\cos \frac{\pi}{\gamma} (0)] = 1 \end{cases}$$

پس تابع **gof** در همه نقاط حد دارد ولی در نقاط صحیح ناپیوسته است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

ابتدا مقدار تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

۹۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\gamma x - 6}{x - 2} \right] + x - 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\gamma x - 6}{x - 2} - \frac{2}{x - 2} \right] + x - 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\gamma - \frac{2}{x - 2} \right] + x - 2 = [\gamma + 1^+] + 0^+ - 2 = 1^+$$

سپس با جایگذاری دوباره مقدار به‌دست آمده در تابع $f(x)$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} fof(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{\gamma x - 6}{x - 2} \right] + x - 2 = [\gamma^+] + 1^+ - 2 = 3^+$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} fof(x) \right] = [3^+] = 3$$

در نتیجه:

(قلمچی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: برای a دو حالت می‌توانیم داشته باشیم، حالت اول این که a صحیح و حالت دوم این که a غیر صحیح باشد، ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که a صحیح باشد:

$$a \in \mathbb{Z}: \lim_{x \rightarrow a^+} (2x + [3x]) = \frac{9a-1}{2} \Rightarrow 2a + [3(a^+)] = \frac{9a-1}{2}$$

$$\Rightarrow 2a + [(3a)^+] = \frac{9a-1}{2} \Rightarrow 2a + 3a = \frac{9a-1}{2} \Rightarrow 5a = \frac{9a-1}{2} \Rightarrow a = -1 \quad \checkmark$$

گام دوم: حال حالت دوم که $a \notin \mathbb{Z}$ را بررسی می‌کنیم: $[3a] = \frac{5a-1}{2}$ صحیح صحیح
را برابر مقدار صحیح k فرض می‌کنیم و a را بر حسب k می‌نویسیم:

$$\frac{5a-1}{2} = k \Rightarrow 2k = 5a-1 \Rightarrow 5a = 2k+1 \Rightarrow a = \frac{2k+1}{5}$$

$$\frac{5a-1}{2} = [3a] = k \xrightarrow{a=\frac{2k+1}{5}} [3(\frac{2k+1}{5})] = k \Rightarrow k \leq \frac{6k+3}{5} < k+1$$

خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{\times 5} 5k \leq 6k+3 < 5k+5 \xrightarrow{-5k} 0 \leq k+3 < 5 \xrightarrow{-3} -3 \leq k < 2$$

با توجه به محدوده به دست آمده برای k و این که k صحیح است و همچنین $a = \frac{2k+1}{5}$ داریم:

$$k = -3 \Rightarrow a = \frac{2(-3)+1}{5} = \frac{-5}{5} = -1 \quad \times \quad (a \text{ در این جا باید غیر صحیح باشد.})$$

$$k = -2 \Rightarrow a = \frac{2(-2)+1}{5} = \frac{-3}{5} \quad \checkmark$$

$$k = -1 \Rightarrow a = \frac{2(-1)+1}{5} = \frac{-1}{5} \quad \checkmark$$

$$k = 0 \Rightarrow a = \frac{2(0)+1}{5} = \frac{1}{5} \quad \checkmark$$

$$k = 1 \Rightarrow a = \frac{2(1)+1}{5} = \frac{3}{5} \quad \checkmark$$

پس مقادیر قابل قبول برای a عبارت هستند از $-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$ که تعداد آن‌ها ۵ تا است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: از فرمول $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ استفاده کرده و عبارت را تا حد ممکن ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x + 2 \cos x}{\cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (\sin x + 1)}{\cos^3 x} = 2 \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x}$$

گام دوم: از اتحاد $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ استفاده می‌کنیم:

$$2 \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1}{1 - \sin^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = 2 \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - \sin x} = 2 \left(\frac{1}{1 - (-1)} \right) = 1$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۹۷

گام اول: حاصل حد $-\infty$ شده است، پس مخرج به ازای $X = \frac{3\pi}{4}$ برابر صفر می‌شود. با توجه به این موضوع، ابتدا a را پیدا می‌کنیم:

$$3 \tan^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + a = 0 \Rightarrow 3(-1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

گام دوم: حال با توجه به این که $X \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^-$ ، مخرج حد را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^-} 3 \tan^2 x - 3 = 3((-1)^-)^2 - 3 = 3(1^+) - 3 = 3^+ - 3 = 0^+$$

گام سوم: می‌دانیم که $\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$ ، پس حاصل صورت به ازای $X = \frac{3\pi}{4}$ باید عددی منفی شود:

$$3b\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 6 \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow 3b\pi - 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 < 0 \Rightarrow 3b\pi - 6\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\Rightarrow 3b\pi - 3 < 0 \Rightarrow 3b\pi < 3 \Rightarrow b < \frac{1}{\pi}$$

پس پاسخ سؤال گزینه (۳) می‌باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۹۸

گام اول: تابع $f^{-1}(x)$ (وارون تابع f) را محاسبه می‌کنیم:

$$y = \sqrt{x+1} + 2 \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y^2 - 4y + 4 = x + 1 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 3$$

گام دوم: حد چپ و راست تابع $g(x)$ را در نقطه $X = 3$ محاسبه می‌کنیم: $g(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(2-x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) = \sqrt{-1+1} + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(2x+2)+a}{bf^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{2x+3}+2+a}{b(x-1)(x-3)}$$

گام سوم: تابع در $X = 3$ پیوسته است؛ پس حد چپ و راست آن در این نقطه برابر است. با توجه به این که به ازای $X \rightarrow 3^+$ ، مخرج کسر برابر صفر است و حد تابع باید برابر ۲ باشد، پس لزوماً صورت کسر نیز برابر صفر است.

$$\sqrt{2(3)+3}+2+a=0 \Rightarrow a+5=0 \Rightarrow a=-5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{\sqrt{2x+3}-3}{b(x-1)(x-3)} \times \frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+3-9}{b(x-1)(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)}{b(x-1)(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)} = \frac{2}{b \times 2 \times 6} = \frac{1}{6b}$$

$$\frac{1}{6b} = 2 \Rightarrow 12b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{12}$$

گام چهارم: با توجه به برابری حد چپ و راست در $X = 3$ ، داریم:

$$\Rightarrow ab = -5 \times \frac{1}{12} = -\frac{5}{12}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \cos x = 0$ و همچنین $\cos x$ در ربع دوم منفی است، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{f(x)}{\cos x} = +\infty \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \cos x} = +\infty \Rightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x)}{0^-} = +\infty$$

گام دوم: می‌دانیم $\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$ ، پس حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x)$ عددی منفی است، با توجه به این موضوع گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) گزینه: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} [2x] - 3 = [2(\frac{\pi}{4})^+] - 3 = [\pi^+] - 3 = 3 - 3 = 0$ ✗

(۲) گزینه: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} [\frac{2x}{\pi}] - 1 = [\frac{2(\frac{\pi}{4})^+}{\pi}] - 1 = [(\frac{\pi^+}{\pi})] - 1 = [1^+] - 1 = 0$ ✗

(۳) گزینه: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} [\frac{x}{\pi}] - 1 = [\frac{(\frac{\pi}{4})^+}{\pi}] - 1 = [(\frac{1}{4})^+] - 1 = 0 - 1 = -1$ ✓

(۴) گزینه: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} [\frac{4x}{\pi}] - 1 = [\frac{4(\frac{\pi}{4})^+}{\pi}] - 1 = [\frac{(4\pi)^+}{\pi}] - 1 = [4^+] - 1 = 4 - 1 = 3$ ✗

می‌بینیم که حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} ([\frac{x}{\pi}] - 1)$ برابر -1 (که عددی منفی است) شده است؛ پس ضابطه f به صورت $f(x) = [\frac{x}{\pi}] - 1$ مناسب است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: با توجه به این که $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x - 3|$ ، ضابطه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x + 9} & ; |x| \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & ; |x| > c \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x - 3| & ; -c \leq x \leq c \\ ax^2 + bx + 2 & ; x < -c \text{ یا } x > c \end{cases}$$

گام دوم: می‌خواهیم تابع در تمام اعداد حقیقی پیوسته باشد، خیالمان از نقاط مرزی باید راحت شود که در این جا c و $-c$ هستند.

برای این که تابع f پیوسته شود باید c و $-c$ را به هر دو ضابطه بدهیم و آن‌ها را مساوی هم قرار دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c) \Rightarrow ac^2 + bc + 2 = |c - 3|$$

$$\lim_{x \rightarrow (-c)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-c)^-} f(x) = f(c) \Rightarrow ac^2 - bc + 2 = |-c - 3|$$

گام سوم: در صورت سؤال گفته شده $c > 3$ باشد، آن‌گاه داخل قدرمطلق‌های به دست آمده در تساوی‌های گام دوم را تعیین علامت می‌کنیم:

$$ac^2 + bc + 2 = \overbrace{|c - 3|}^{\text{مثبت}} \Rightarrow ac^2 + bc + 2 = c - 3 \quad (1)$$

$$ac^2 - bc + 2 = \overbrace{|-c - 3|}^{\text{منفی}} \Rightarrow ac^2 - bc + 2 = c + 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف را جمع می‌کنیم}} 2ac^2 + 4 = 2c \Rightarrow ac^2 + 2 = c \xrightarrow{\text{جای گذاری در (1)}} 2c + bc = c - 3 \Rightarrow bc = -2$$

گام چهارم: از معادله $ac^2 + 2 = c$ ، داریم: $c(ac - 1) = -2$ و اگر طرفین این تساوی را بر طرفین تساوی $bc = -3$ تقسیم

$$\frac{c(ac - 1)}{bc} = \frac{-2}{-3} \Rightarrow \frac{ac - 1}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3ac - 3 = 2b \Rightarrow 3ac - 2b = 3$$

کنیم، داریم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: ضابطه بالایی را با توجه به نکته گفته شده برای براکت به صورت زیر می نویسیم:

$$(3-2a)[x+1]+a^2[-x]=(3-2a)([x]+1)+a^2[-x]=(3-2a)[x]+(3-2a)+a^2[-x]$$

گام دوم: با توجه به این که ضابطه پایینی یک تابع ثابت است، باید ضرایب $[x]$ و $[-x]$ برابر باشند:

$$3-2a=a^2 \Rightarrow a^2+2a-3=0 \Rightarrow (a+3)(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ a=1 \end{cases}$$

گام سوم: پس ضابطه f به یکی از دو صورت زیر می باشد:

$$a=-3: f(x)=\begin{cases} 9[x]+9+9[-x] & ; x \notin \mathbb{Z} \\ \sin b\pi & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \lim_{x \rightarrow \infty} (9[x]+9+9[-x]) = \sin b\pi$$

$$\Rightarrow \sin b\pi = 9 \text{ غ.ق.ق.}$$

$$a=1: f(x)=\begin{cases} [x]+1+[-x] & x \notin \mathbb{Z} \\ \sin b\pi & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} \lim_{x \rightarrow \infty} ([x]+1+[-x]) = \sin b\pi \Rightarrow \sin b\pi = 1$$

از $\sin b\pi = 1$ نتیجه می گیریم کمترین مقدار مثبت b زمانی به دست می آید که $b\pi = \frac{\pi}{4}$ ، یعنی کمترین مقدار عدد مثبت b برابر با $\frac{1}{4}$ است. در نتیجه کمترین مقدار $a+b$ برابر می شود با:

$$1+\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۲

گام اول (به دست آوردن مقادیر مجهول a و b):

از آن جا که $f(x)$ (مقسوم) بر $x^2 - 3x + 2$ (مقسوم علیه) بخش پذیر است، پس بر همهء عامل های $x^2 - 3x + 2$ یعنی $(x-2)$ و $(x-1)$ بخش پذیر است و در واقع داریم:

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

پس:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 16(1)^2 + 1^3 + a(1) + b = 0 \Rightarrow -14 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = 14$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 2^3 - \underbrace{16 \times (2)^2}_{2^4} + 2^3 + 2a + b = 0 \Rightarrow \cancel{2^3} - \cancel{2^4} + 8 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -8$$

که با حل دستگاه معادله زیر می توانیم مقادیر a و b را به دست آوریم:

$$\begin{cases} a + b = 14 \\ 2a + b = -8 \end{cases}$$

$$(a - 2a) + (b - b) = 14 - (-8) \Rightarrow -a = 22 \Rightarrow a = -22$$

که با جای گذاری $a = -22$ در $a + b = 14$ مقدار b به دست می آید.

$$a + b = 14 \xrightarrow{a=-22} -22 + b = 14 \Rightarrow b = 36$$

بنابراین ضابطهء تابع f برابر است با:

$$f(x) = x^3 - 16x^2 + x^3 - 22x + 36$$

گام دوم (محاسبهء باقی ماندهء تقسیم $f(x) + f(2x+1)$ بر $x+1$):

برای به دست آوردن باقی ماندهء تقسیم $f(x) + f(2x+1)$ بر $x+1$ ، باید مقدار $f(x) + f(2x+1)$ به ازای $x = -1$ را به دست آوریم:

$$f(-1) + f(2(-1)+1) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1)$$

$$\xrightarrow{f(-1)=(-1)^3-16(-1)^2+(-1)^3-22(-1)+36=72} 2(72) = 144 \text{ باقی مانده}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۳

گام اول (به دست آوردن مقدار a): از آن جا که $x = 2$ مجانب قائم است، پس $x = 2$ ریشهء مخرج است؛ بنابراین:

$$2a - \sin \frac{\pi(2)}{12} = 0 \Rightarrow 2a - \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow 2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

گام دوم (محاسبهء مقدار b): با توجه به شکل وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، نمودار به سمت $-\infty$ می رود (در همسایگی راست نمودار به سمت $-\infty$ می رود)؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{6} x - 2b}{\frac{1}{2} - \sin \frac{\pi x}{12}} = \frac{\frac{1}{4} \cos(\frac{\pi}{3}) - 2b}{2(\frac{1}{4}) - \sin(\frac{\pi}{6})^+} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} - 2b}{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^+} = \frac{\frac{1}{8} - 2b}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{8} - 2b > 0 \Rightarrow b < \frac{1}{16}$$

گام سوم (محاسبهء $[16b]$):

$$b < \frac{1}{16} \xrightarrow{\times 16} 16b < 16 \times \frac{1}{16} \Rightarrow 16b < 1 \Rightarrow [16b] \leq 0$$

بنابراین حداکثر مقدار $[16b]$ برابر صفر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: با استفاده از درس باکس داریم:

۱۰۴

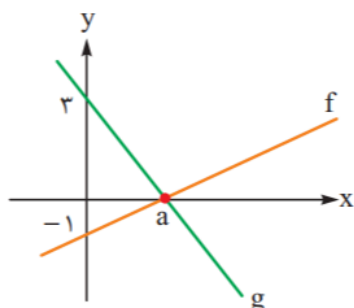
$$\sqrt{x^2 + 2} \approx |x|$$

$$\sqrt{x^2 + 6x} \approx |x + 3|$$

گام دوم: حالا حاصل حد را به سادگی حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 + 6x}}{x - \sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + |x + 3|}{x - \sqrt{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + (-x - 3)}{x - \sqrt{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



گام اول (به دست آوردن شیب خطوط f و g):

اگر محل تلاقی دو خط با محور xها را a فرض کنیم، داریم:

$$(0, 3), (a, 0) \in g \xrightarrow{\text{محاسبه شیب خط } g} m_g = \frac{3 - 0}{0 - a} = -\frac{3}{a}$$

$$(0, -1), (a, 0) \in f \xrightarrow{\text{محاسبه شیب خط } f} m_f = \frac{-1 - 0}{0 - a} = \frac{1}{a}$$

گام دوم (به دست آوردن شیب خطوط f^{-1} و g^{-1}): با توجه به نکته، شیب وارون یک خط، معکوس شیب خط است، پس:

$$m_{g^{-1}} = -\frac{a}{3}$$

$$m_{f^{-1}} = a$$

گام سوم (محاسبه مقدار a): توان صورت و مخرج هر دو یکی است؛ پس فقط با داشتن مقادیر شیب می‌توان حد را بررسی کرد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f + 2g^{-1}}{f^{-1} - g} = \frac{\frac{1}{a} + 2(-\frac{a}{3})}{a - (-\frac{3}{a})} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{2a}{3}}{a + \frac{3}{a}} = \frac{\frac{3 - 2a^2}{3a}}{\frac{a^2 + 3}{a}} = \frac{3 - 2a^2}{3a^2 + 9}$$

که در این مقدار باید طبق صورت سوال برابر $-\frac{1}{2}$ باشد؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f + 2g^{-1}}{f^{-1} - g} = \frac{3 - 2a^2}{3a^2 + 9} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -3a^2 - 9 = 6 - 4a^2 \Rightarrow a^2 = 15 \Rightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

از آنجا که a در قسمت مثبت محور xهاست، پس $a = \sqrt{15}$ قابل قبول بوده و $a = -\sqrt{15}$ غیر قابل قبول است.گام چهارم (محاسبه مقدار $f^{-1}(0)$): با توجه به شکل $f(a) = 0$ است، پس طبق نکته، $f^{-1}(0) = a$ است: $f^{-1}(0) = \sqrt{15}$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۶

گام اول (ساخت $f(2x)$ و جای گذاری در $((2x - f(2x))(x + f(x)))$):

$$f(2x) = \sqrt{(2x)^2 + 4} = \sqrt{4x^2 + 4} = 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (2x - f(2x))(x + f(x)) = (2x - 2\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 4})$$

گام دوم (محاسبه حد):

حواسمان هست که حد صفر نیست.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x - 2\sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 4})) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2x - 2\sqrt{x^2 + 1}) \times \frac{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 4}))$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - (4x^2 + 4)}{2x + 2\sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 4}) \right) \xrightarrow{\text{استفاده از پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{2x + |2x|} (x + |x|) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\frac{-4}{2x + 2x}}_{\frac{-4}{4x}} \underbrace{(x + x)}_{2x} \right) = -2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۰۷

گام اول: با توجه به این که حاصل حد برابر عدد ثابت ۳ شده است و f چندجمله‌ای است، پس f از درجه اول است و خطی است (f را یک بار از درجه ۲ و بار دیگر از درجه ۳ در نظر بگیرید، می‌بینید که طبق قاعده پرتوان حاصل ۳ نمی‌شه.)، f را به صورت $f(x) = ax + b$ در نظر می‌گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + f(x)}{x + f(2x)} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + ax + b}{x + a(2x) + b} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2+a)x + b}{(2a+1)x + b} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2+a)\cancel{x}}{(2a+1)\cancel{x}} = 3 \Rightarrow \frac{2+a}{2a+1} = 3 \Rightarrow 2+a = 6a+3 \Rightarrow 5a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{5}$$

گام دوم: به سراغ محاسبه خواسته سؤال می‌رویم.

$$f(2) - f(1) = (2a + b) - (a + b) = a \xrightarrow{a = \frac{-1}{5}} f(2) - f(1) = \frac{-1}{5}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، یعنی $x < 0$ است و ضابطه‌های دو تابع به صورت زیر هستند:

$$f(x) = x^2 - x - 3, \quad g(x) = x^2 + x + 3$$

گام دوم: حالا ضابطه‌های هر دو تابع را جای‌گذاری می‌کنیم و حاصل حد را حساب می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(x))^2 - (g(x))^2}{(x - g(x))\sqrt{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))}{(x - g(x))\sqrt{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2(-2x - 6)}{(-x^2 - 3)\sqrt{x^2 - x - 3}}$$

گام سوم: وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ تابع $y = \sqrt{x^2 - x - 3}$ هم‌ارز تابع $y = \sqrt{x^2} = |x|$ است و در x های منفی این تابع با تابع $y = -x$ برابر است؛ پس داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2(x+3)}{(-x^2-3)(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3}{x^3} = -4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: با توجه به نمودار تابع f مشخص است که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ است؛ پس حد داده‌شده مبهم صفرصفرم است.

وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، مقادیر تابع f کمتر از ۲ است؛ پس عبارت $f(x) - 2$ منفی است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x))^3 - 8}{|f(x) - 2|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f(x) - 2)((f(x))^2 + 2f(x) + 4)}{-(f(x) - 2)} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} ((f(x))^2 + 2f(x) + 4) = -(2^2 + 2(2) + 4) = -12$$

پس $a = -12$ است.

گام دوم: حالا می‌رویم سراغ حد مورد نظر سؤال. ابتدا حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a}{f(x)}$ را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a}{f(x)} = \frac{12}{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)} = \frac{12}{2} = 6$$

گام سوم: اما وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مقادیر تابع f از ۲ بزرگ‌تر و داریم:

$$f(x) > 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{2} \xrightarrow{-a=12} 0 < \frac{-a}{f(x)} < 6$$

این یعنی مقادیر تابع $y = -\frac{a}{f(x)}$ با مقادیر کمتر از ۶ به ۶ نزدیک می‌شوند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{a}{f(x)} \right] = [6^-] = 6$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: عرض نقاط A و C همان عرض از مبدأ تابع است:

$$f(0) = \frac{4}{-1} = -4 \Rightarrow y_A = y_C = -4$$

گام دوم: طول نقطه C مقدار مثبتی است که به ازای آن حد تابع $\pm\infty$ می‌شود؛ یعنی طول نقطه C ریشه مثبت مخرج ضابطه تابع است:

$$2x_C^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_C^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

گام سوم: عرض نقطه B برابر حد تابع در $+\infty$ است:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 4}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

گام چهارم: و طول نقاط A و B، طول نقطه تقاطع نمودار تابع f و خط $y = 1$ یعنی جواب منفی معادله $f(x) = 1$ است.

$$f(x) = 1 \xrightarrow{x < 0} \frac{-2x^2 + 4}{2x^2 - 1} = 1 \Rightarrow 2x^2 - 1 = -2x^2 + 4 \Rightarrow 4x^2 = 5 \xrightarrow{x < 0} x_A = x_B = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

گام پنجم: در نتیجه مساحت مثلث ABC با رئوس $A(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -4)$ ، $B(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 1)$ و $C(\frac{\sqrt{2}}{2}, -4)$ برابر است با:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} (5) (\frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}) = \frac{5}{4} (\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

گام اول: ابتدا ضابطه‌های تابع درجه دوم f و تابع خطی g را به دست می‌آوریم:

$$\text{تابع } f: f(x) = a(x+1)(x-3) \xrightarrow{f(0)=-\frac{1}{3}} -\frac{1}{3} = a(-3) \Rightarrow a = \frac{1}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$$

$$\text{تابع } g: \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow g(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

گام دوم: ضابطه‌های f و g را جای گذاری می‌کنیم:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{f(x)}}{x + g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}}}{x + (-\frac{2}{3}x + 2)}$$

و اگر از نکته سؤال استفاده کنیم، داریم:

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{1}{3}|x-1|}{\frac{1}{3}x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{3}x}{\frac{1}{3}x} = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۱۲

گام اول: با توجه به قضایای حد، خواسته سؤال عبارت است از:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x) - f(-x)) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) \quad (*)$$

گام دوم: حال حاصل حدهای $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$ را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + 2^x}{2^{x-1} - 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1}}{-3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \times 3}{-3^x} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{-x+1} + 2^{-x}}{2^{-x-1} - 3^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{-x}}{2^{-x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{-x}}{2^{-x} \times (2^{-1})} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

گام سوم: حاصل حدهای به دست آمده را در رابطه (*) که خواسته سؤال است، قرار می‌دهیم.

$$2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = 2(-3) - 2 = -6 - 2 = -8$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

هرکدام از حدود چپ و راست را حساب می‌کنیم:

۱۱۳

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f\left(\frac{2}{x}\left(1 + \left[-\frac{x}{2}\right]\right)\right) = f(0) = -2$$

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(\frac{2}{x}\left(1 + \left[-\frac{x}{2}\right]\right)\right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f\left(-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{6x^2 - 12x + 8}}{(x-2)^2} \times \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{6x^2 - 12x + 8}}{x\sqrt{x} + \sqrt{6x^2 - 12x + 8}} = \frac{(x^2 - 6x^2 + 12x - 8)}{(x-2)^2 (x\sqrt{x} + \sqrt{6x^2 - 12x + 8})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = a \quad \left[\frac{1}{a}\right] = [4\sqrt{2}] = 5$$

۱۱۴

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

$$ax^2 - x + b = a(x+2)^2 = ax^2 + 4ax + 4a \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x+2}{ax^2 - x + b} = \frac{-6}{\boxed{}} = +\infty$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = 4a = -1$$

عبارت منخرج کسر همواره باید 0^- باشد

۱۱۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\Delta + bx^2|}{ax^2 + bx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|\Delta - x^2|}{-\frac{1}{4}x^2 - x} \simeq \frac{x^2}{-\frac{1}{4}x^2} = -4$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

در نقطه $x = a$ باید مخرج صفر شود و علامت آن عوض نشود ۱۱۶

$$\cos^2 x - \cos x = \cos x (\cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} & \text{ساده} \\ x = 2\pi & \text{مضاعف} \Rightarrow a = 2\pi \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\frac{b}{\pi}x + 2}{\cos x (\cos x - 1)} = \frac{2b + 2}{1 \times 0^-} = +\infty$$

$$\Rightarrow 2b + 2 < 0 \Rightarrow b < -1 \Rightarrow [b] \leq -2$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

صورت کسر در $x = 2$ باید برابر صفر باشد. ۱۱۷

$$f^{-1}(2) - 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{2 + a} = 2 \Rightarrow a = -1$$

$$y = f(x) = 1 + \sqrt{2x - 1} \Rightarrow \sqrt{2x - 1} \Rightarrow y - 1 \Rightarrow x = \frac{(y-1)^2 + 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{(x-1)^2 + 1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 2 - 2}{2(x^2 + x - 6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{2(x-2)(x+3)} = \frac{2}{2(5)} = \frac{1}{5} = 0/2$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{0/2}{(-1)} = -0/2$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\frac{a \sin x}{\sqrt{2 + 2 \cos x}} = \frac{2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\left| \cos \frac{x}{2} \right|} \quad \text{۱۱۸}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{-\cos \frac{x}{2}} = -a \Rightarrow \text{مقدار تابع} = \text{حد راست}$$

$$\Rightarrow -a = f(\pi) = 2a + 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = a = -\frac{4}{3} \\ f(\pi) = 2a + 4 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف: } \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

چون $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin^2 x$ پس کافی است حد زیر را محاسبه کنیم و سپس جواب را به توان دو برسانیم: ۱۱۹

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\frac{1}{x}(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{\frac{1}{x}(x-1)(x+1)(\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{3}{\frac{1}{x}(2)(4)} = \frac{3}{4}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

چون $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ ، بنابر این حد صورت باید در $x = 1$ صفر شود:

۱۲۰

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{2 - \sqrt{x}} + b) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{2 - \sqrt{x}} - a}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(2 - \sqrt{x} - 1)}{(x^2 - 1)(\sqrt{2 - \sqrt{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(1 - \sqrt{x})}{\underbrace{2}_{\neq 0} \underbrace{(x+1)(x-1)}_{=0}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(1 - \sqrt{x})}{\underbrace{4(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x}^2 + \sqrt{x} + 1)}_{\neq 0}} = -\frac{a}{12} = 2 \Rightarrow a = -24$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{2 - \sqrt{x}} - a}{x^2 - 1} = \div \text{Hop: } \frac{a(-\frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{x}}})(-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{2x} \xrightarrow{x=1} \frac{a(-\frac{1}{4})}{2} = 2 \rightarrow a = -24$$

روش دوم:

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f(1) = 3 \Rightarrow 1 + 1 + m = 3 \Rightarrow m = 1$$

۱۲۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{3 - x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x\sqrt{x} - 1)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x\sqrt{x} - 1)(x\sqrt{x} + 1)}{(x-1)\underbrace{(x^2 + x + 2)}_{\neq 0}\underbrace{(x\sqrt{x} + 1)}_{\neq 0}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^3 - 1)}{\lambda(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)(x^2 + x + 1)}{\lambda(x-1)} = -\frac{3}{\lambda} \end{aligned}$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^3 - x^2 + 1}}{\sqrt{x + 1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^3 + x^2 - 1}{\sqrt{x + 1}(\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + \sqrt{x^3 - x^2 + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x} \times 2x\sqrt{x}} = 1 \end{aligned}$$

۱۲۲

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$g(x) = \frac{2ax + b}{x + ax + b}$$

فرض کنید $f(x) = ax + b$ باشد، پس:

۱۲۳

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 2 \Rightarrow \frac{2a}{1+a} = 2 \Rightarrow a = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{مخرج} = 0 \Rightarrow 2 + 2a + b = 0 \xrightarrow{a=-3} b = 6$$

$$f(x) = -3x + 6 \Rightarrow f(-2) = 12$$

پس:

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۴ باید $x = b$ ریشه مضاعف مخرج باشد.

$$ax^2 - ax - b = a(x - b)^2 = ax^2 - 2abx + ab^2 \Rightarrow \begin{cases} -a = -2ab \\ -b = ab^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}x + c}{-2x^2 + 2x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}x + c}{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = -\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + c > 0 \Rightarrow c > -\frac{1}{2} \Rightarrow ab + c > -\frac{5}{4} \Rightarrow [ab + c] \geq -2$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۲۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + 3n}{2x - 4}$ برابر ۲ است، پس باید عبارت $\frac{4x + 3n}{2x - 4}$ با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل کند.

$$\frac{4x + 3n}{2x - 4} < 2 \Rightarrow 4x + 3n < 4x - 8 \Rightarrow n < -\frac{8}{3} \Rightarrow n = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{nx + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + |x|}{x} = -4$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\sin x - \cos^2 x = \sin x - (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x + \sin x - 1 = (\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

به ازای $x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+$ حاصل مخرج به صورت $\frac{3}{4} \times 0^+ = 0^+$ است. پس باید حاصل حد در $\left(\frac{\pi}{6}\right)^+$ منفی باشد.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} [\sin^3 x] = \left[\frac{1}{8} \right] = 0 \quad \times$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} [\cos^3 x] = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} \right] = -1 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} [1 + \sin^3 x] = \left[\frac{9}{8} \right] = 1 \quad \times$$

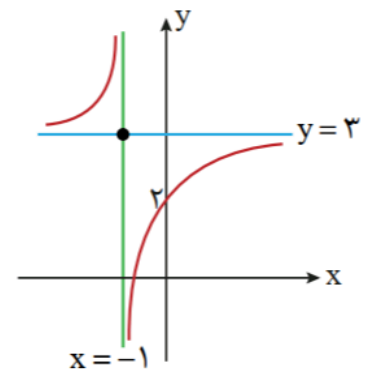
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} [1 - \cos^3 x] = \left[\frac{7}{8} \right] = -1 \quad \times$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f(x) = 3 + \frac{-1}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty : f(x) \rightarrow 3^- \\ x \rightarrow -\infty : f(x) \rightarrow 3^+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = \left[\frac{2}{3} \right] = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = \left[\frac{4}{3} \right] = 3 \end{cases}$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)



۱۲۷

در مزدوج ضرب و تقسیم می‌کنیم.

۱۲۸

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x}} - \sqrt{x^2 - \sqrt{x}} \right) \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x}} + \sqrt{x^2 - \sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x}} + \sqrt{x^2 - \sqrt{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \left(x^2 + \sqrt{x} - x^2 + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x}} + \sqrt{x^2 - \sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} x^n}{\underbrace{\sqrt{x^2 + \sqrt{x}}}_{\sim x} + \underbrace{\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}}_{\sim x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} x^n}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{x} = m \end{aligned}$$

توان صورت با مخرج برابر است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + n = 1 \Rightarrow n = \frac{1}{2} \\ m = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow m + n = \frac{3}{2}$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

فرض کنید $f(0) = a$ و $(a > 0)$. پس $f(x) = -\frac{a}{2}x + a$ و در نتیجه $f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}x + 2$

۱۲۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x^2)}{x - f^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{a}x^2 + 2}{x - \left(-\frac{a}{2}x + a\right)^2} \stackrel{\text{جمله پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{a}x^2}{-\frac{a}{4}x^2} \\ &= \frac{-\frac{2}{a}}{-\frac{a}{4}} = \frac{8}{a^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow f(0) = a = 8 \end{aligned}$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$= x^2 + (m - 2b)x^2 + (b^2 - 2mb)x + mb^2$$

باید b ریشه مضاعف مخرج باشد و $a < 0$ باشد.

۱۳۰

$$\Rightarrow \begin{cases} m - 2b = 0 & (1) \\ b^2 - 2mb = a & (2) \\ mb^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

$$x^2 + ax + 2 = (x - b)^2(x + m) = (x^2 - 2bx + b^2)(x + m)$$

$$\begin{aligned} (1), (3) &\Rightarrow 2b \times b^2 = 2 \Rightarrow b = 1 \xrightarrow{mb^2=2} m = 2 \xrightarrow{(2)} a = -3 \\ &\Rightarrow a - b = -4 \end{aligned}$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

حد چپ و راست را بررسی می‌کنیم.

۱۳۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a + \cos x}{a \sin x + \left[1^- \right]} = \frac{a+1}{a \times 0^+} = +\infty \Rightarrow \frac{a+1}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} > 0 \Rightarrow a < -1 \text{ یا } a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a + \cos(-\pi)}{a \sin x + \left[1^- \right]} = \frac{a-1}{a \times 0^-} = +\infty \Rightarrow \frac{a-1}{0^-} = +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{a-1}{a} < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

پس باید $0 < a < 1$ باشد.

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

شیب نیم‌مماس چپ را m_1 و شیب نیم‌مماس راست را m_2 فرض کنید.

۱۳۲

وقتی $h \rightarrow 0^+$ آن‌گاه $(2-3h) \rightarrow 2^-$ و $(2+2h) \rightarrow 2^+$ پس:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2-3h) - f(2+2h)}{h} = -3f'_-(2) - 2f'_+(2) = 1$$

$$\Rightarrow -3m_1 - 2m_2 = 1 \Rightarrow m_2 = \frac{1+3m_1}{-2}$$

$$m_1 \left(\frac{1+3m_1}{-2} \right) = -1 \Rightarrow 3m_1^2 + m_1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = -1 \Rightarrow m_2 = 1 \\ m_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow m_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

از طرفی $m_1 m_2 = -1$ پس:

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - x^2}} \times \sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{4 - 4 + x^2}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \frac{|x|}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - x^2}}}$$

به‌ازای $x = 0$ حاصل مخرج برابر ۲ است پس در همسایگی $x = 0$ رابطه $f(x) = \frac{|x|}{2}$ برقرار است.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2h) + f(-3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|2h|}{2} + \frac{|-3h|}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{5}{2}|h|}{h} = -\frac{5}{2}$$

(دپاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۳۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x-1} \times \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(1)}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f'(1) = 3$$

$$(g \circ f)'(1) = 4 \Rightarrow f'(1) \underbrace{g'(f(1))}_{-2} = 4$$

$$\Rightarrow f'(1)g'(-2) = 4 \Rightarrow g'(-2) = \frac{4}{3}$$

$$y = g\left(\frac{2}{x}\right) \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^2} g'\left(\frac{2}{x}\right) \Rightarrow y'(-1) = -2g'(-2)$$

$$y'(-1) = -2 \times \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

زیرا:

از طرفی:

نکته یک تابع خطی مثل $f(x) = ax + b$ ، در دو حالت می‌تواند وارون خودش باشد:

حالت اول: f تابع همانی باشد.

حالت دوم: شیب f برابر -1 باشد که در این صورت ضابطه f به صورت $f(x) = -x + b$ می‌شود.

گام اول: تابع خطی f وارون خودش است، پس طبق نکته بالا تابع f یا همانی است یا شیب آن -1 است. در این جا f نمی‌تواند همانی باشد، چون از نقطه $(-1, 4)$ می‌گذرد، پس شیب f باید برابر -1 باشد که در این صورت ضابطه آن به صورت $f(x) = -x + b$ می‌شود. **گام دوم:** f از نقطه $(-1, 4)$ می‌گذرد: پس ضابطه f به صورت $f(x) = -x + 3$ است.

$$f(x) = -x + b \xrightarrow{(-1, 4)} 4 = \underbrace{-(-1)}_{+1} + b \Rightarrow b = 3$$

گام سوم: گفتیم f وارون خودش است، پس ضابطه f^{-1} برابر با ضابطه f است: **گام چهارم:** حالا جواب سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(3x) + 2x}{|x| - 3f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty, |x| = -x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 3 + 2x}{-x - 3(-x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 3}{2x - 9} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی پرتوان}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳۶

گام اول: حد f در $x = 3$ برابر $-\infty$ است، پس مقدار حد راست و چپ آن در $x = 3$ هم باید برابر $-\infty$ باشد.

گام دوم: حد راست f در $x = 3$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a[x] - [-x]}{x - 3} \xrightarrow{x=3/1 \text{ مثلاً}} \begin{cases} [x] = [3/1] = 3 \\ [-x] = [-3/1] = -4 \end{cases}$$

برای از بین بردن براکت‌ها داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{a[x] - [-x]}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3a - (-4)}{x - 3} = \frac{3a + 4}{0^+}$$

پس:

$$3a + 4 < 0 \Rightarrow a < -\frac{4}{3}$$

مقدار حد باید برابر $-\infty$ باشد، پس علامت صورت، یعنی $3a + 4$ باید منفی شود:

گام سوم: حد چپ f در $x = 3$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{a[x] - [-x]}{x - 3}$$

$$x \rightarrow 3^- \xrightarrow{x=2/9 \text{ مثلاً}} \begin{cases} [x] = [2/9] = 2 \\ [-x] = [-2/9] = -3 \end{cases}$$

برای از بین بردن براکت‌ها داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{a[x] - [-x]}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2a - (-3)}{x - 3} = \frac{2a + 3}{0^-}$$

پس:

$$2a + 3 > 0 \Rightarrow a > -\frac{3}{2}$$

مقدار حد باید برابر $-\infty$ باشد، پس علامت صورت، یعنی $2a + 3$ باید مثبت شود:

گام چهارم: با توجه به دو شرط $a < -\frac{4}{3}$ و $a > -\frac{3}{2}$ ، باید $-\frac{3}{2} < a < -\frac{4}{3}$ باشد. محدوده $11a$ را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{3}{2} < a < -\frac{4}{3} \xrightarrow{\times 11} -\frac{33}{2} < 11a < -\frac{44}{3} \Rightarrow -16/5 < 11a < -14/6 \quad [11a] = -17, -16, -15 \Rightarrow \text{مقدار } 3$$

پس:

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۳۷

گام اول: ضابطه وارون f در $x \leq 2$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 4 \Rightarrow y = 2x^2 - 8x + 4 \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2}y = x^2 - 4x + 2 \xrightarrow{+2} \frac{1}{2}y + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}y + 2 = (x - 2)^2$$

از طرفین رادیکال می‌گیریم:

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y + 2} = \sqrt{(x - 2)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}y + 2} = |x - 2|$$

طبق گفته سؤال $x \leq 2$ ؛ پس $|x - 2| = -x + 2$ می‌شود:

$$\sqrt{\frac{1}{2}y + 2} = -x + 2 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{2}y + 2} + 2$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 2$$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

گام دوم: حاصل حد را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f^{-1}(x) - 1}{f(x + 3) + 2} \xrightarrow{f(x) = 2x^2 - 8x + 4} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 2 - 1}{2(x + 3)^2 - 8(x + 3) + 4 + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} + 1}{2(x + 3)^2 - 8(x + 3) + 6}$$

با جای گذاری $x = -2$ به صفر صفر می‌رسیم؛ پس هوییتال می‌زنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}x + 2} - 4} = \frac{-\frac{1}{4}}{-4} = \frac{1}{16}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: اول از اتحاد مزدوج کمک می گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^3 + 2x} + \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}) \times \frac{\sqrt{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}{\sqrt{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^3 + 2x - \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^3}) x}{\sqrt{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$$

گام دوم: بعد از اتحاد چاق و لاغر استفاده می کنیم:

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^3 + 2x - \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^3}) x}{\sqrt{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} \times \frac{(x^3 + 2x)^3 + (x^3 + 2x) \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^3} + \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^9}}{(x^3 + 2x)^3 + (x^3 + 2x) \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^3} + \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^9}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{x^9 + 6x^8 + 12x^7 + 8x^6 - x^9 - 6x^8 - 9x^7}^{((x^3 + 2x)^3 - (x^3 + 3x^2)^3)} x}{(\sqrt{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2})((x^3 + 2x)^3 + (x^3 + 2x) \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^3} + \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^9})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^6 + 8x^7)x}{(\sqrt{x^3 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2})((x^3 + 2x)^3 + (x^3 + 2x) \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^3} + \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2)^9})}$$

گام سوم: از هم ارزی پرتوان استفاده می کنیم:

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^7 \times x}{(\underbrace{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x^3}}_{|x|=-x})((x^3)^3 + x^3 \sqrt[3]{(x^3)^3} + \sqrt[3]{(x^3)^9})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^8}{(-x - x)(x^9 + x^9 + x^9)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^8}{-6x^9} = -\frac{1}{2}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: برای این که حاصل حد نامتناهی شود، مخرج باید در $x = a$ برابر صفر باشد:

$$4 \cos(2x) - 9 \cos(a) + 5 \xrightarrow{x=a} 4 \cos(2a) - 9 \cos(a) + 5 = 0$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

یادآوری

پس:

$$4(2\cos^2(a) - 1) - 9\cos(a) + 5 = 0 \Rightarrow 8\cos^2(a) - 4 - 9\cos(a) + 5 = 0 \Rightarrow 8\cos^2(a) - 9\cos(a) + 1 = 0$$

نکته اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، جمع ضرایب برابر صفر باشد (یعنی $a + b + c = 0$)، ریشه‌های معادله، $x = 1$ و

$$x = \frac{c}{a}$$

نمی‌تواند برابر ۱ باشد، بنابراین فقط $\cos(a) = \frac{1}{8}$ قابل قبول است.

پس ریشه‌های این معادله $\cos(a) = \frac{1}{8}$ و $\cos(a) = 1$ هستند.

گام دوم: حالا دقت کنید می‌دانیم جواب‌های معادله $\cos(x) = 1$ ، به صورت $x = 2k\pi$ است.

در بازه $(4\pi, 6\pi)$ ، هیچ عددی به شکل $2k\pi$ نداریم (خود 4π و 6π به شکل $2k\pi$ هستند، ولی داخل بازه نیستند)، پس مقدار $\cos(a)$

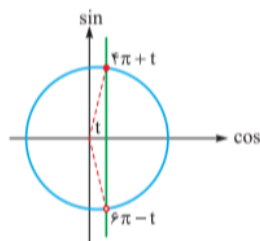
نمی‌تواند برابر ۱ باشد، بنابراین فقط $\cos(a) = \frac{1}{8}$ قابل قبول است.

گام سوم: حالا فرض کنید $\cos(t) = \frac{1}{8}$ و t زاویه‌ای حاده است، در این صورت داریم:

$$\cos(a) = \frac{1}{8} \xrightarrow{\cos(t) = \frac{1}{8}} \cos(a) = \cos(t) \Rightarrow a = 2k\pi \pm t$$

جواب‌های این معادله در بازه $(4\pi, 6\pi)$ ، $a = 4\pi + t$ و $a = 6\pi - t$ است که جمع جواب‌ها برابر 10π می‌شود.

برای درک بهتر به دایره مثلثاتی مقابل نگاه کنید.



(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

گام اول: با توجه به نمودار رسم شده برای تابع g ، متوجه می شویم که حد تابع g در $+\infty$ برابر ۴ است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (3f(x) + \sqrt{f(x)}) = 4$$

گام دوم: طبق گفته سؤال، حد تابع f در $+\infty$ برابر عدد حقیقی مثبت L است؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3f(x) + \sqrt{f(x)}) = 4 \xrightarrow{\lim f(x)=L} 3L + \sqrt{L} = 4 \quad (*)$$

گام سوم: معادله را حل می کنیم:

$$3L + \sqrt{L} = 4 \Rightarrow \sqrt{L} = 4 - 3L \xrightarrow{\text{توان ۲}} L = 9L^2 + 16 - 24L$$

$$\Rightarrow 9L^2 - 24L + 16 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} L = 1 \\ L = \frac{16}{9} \end{cases}$$

غ ق ق چون در (*) صدق نمی کند.

بنابراین $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ است.

گام چهارم: اما دقت کنید با توجه به نمودار g ، اگر بخواهیم دقیق بررسی کنیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 4$ ؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (3f(x) + \sqrt{f(x)}) < 4 \Rightarrow 3L + \sqrt{L} < 4$$

دیدیم برای این که $3L + \sqrt{L} = 4$ باشد، $L = 1$ است، حالا واضح است برای این که $3L + \sqrt{L} < 4$ باشد، باید $L < 1$ شود؛ یعنی:

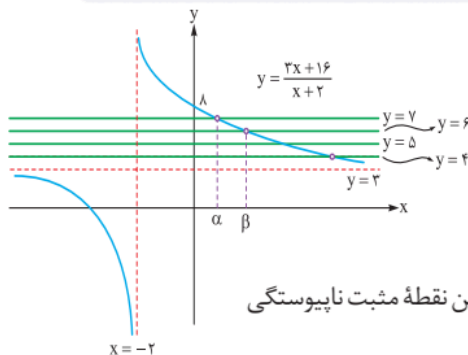
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1^-$$

گام پنجم: در آخر سراغ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[f\left(\frac{-2}{x}\right) \right]$ می رویم، $x \rightarrow 0^-$ است، پس $\frac{-2}{x} \rightarrow +\infty$ می شود (واضحه دیگه! ببین: $\frac{-2}{0^-} = +\infty$)؛ پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[f\left(\frac{-2}{x}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t)] = [1^-] = 0$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

نکته توابع براکتی به شکل $y = [f(x)]$ ، در نقاطی که مقدار $f(x)$ صحیح باشد، ناپیوسته اند.



گام اول: نمودار تابع هموگرافیک $y = \frac{3x+16}{x+2}$ را رسم می کنیم:

گام دوم: با توجه به نمودار رسم شده، واضح است که طول اولین نقطه مثبت ناپیوستگی f برابر α و طول دومین نقطه مثبت ناپیوستگی f برابر β است.

گام سوم: مقدار تابع $y = \frac{3x+16}{x+2}$ ، در نقطه ای به طول β برابر ۶ می شود؛ پس:

$$y = \frac{3x+16}{x+2} \xrightarrow{\substack{x=\beta \\ y=6}} 6 = \frac{3\beta+16}{\beta+2} \Rightarrow 6\beta+12 = 3\beta+16 \Rightarrow 3\beta = 4 \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$$

بنابراین طول دومین نقطه مثبت ناپیوستگی f برابر $x = \frac{4}{3}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۲

نکته

اگر $u \rightarrow 0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} \sin^n(u) \approx u^n \\ \cos^n(u) \approx 1 - \frac{n}{2}u^2 \\ \tan^n(u) \approx u^n \end{cases}$$

گام اول: $x \rightarrow 0$ ، پس با توجه به نکته بالا، داریم:

$$\sqrt{\cos(nx)} = \cos^{\frac{1}{2}}(nx) \approx 1 - \frac{\frac{1}{2}}{2}(nx)^2 = 1 - \frac{1}{4}n^2x^2$$

$$\cos^n(x) \approx 1 - \frac{n}{2}x^2$$

گام دوم: با جای گذاری مقادیر به دست آمده، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(nx)} - 1}{1 - \cos^n(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{4}n^2x^2 - 1}{1 - (1 - \frac{n}{2}x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}n^2x^2}{\frac{n}{2}x^2} = \frac{-\frac{1}{4}n^2}{\frac{n}{2}} = -\frac{n}{2}$$

$$-\frac{n}{2} = 6 \Rightarrow n = -12 \quad \text{گام سوم: از طرفی طبق فرض سؤال } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos(nx)} - 1}{1 - \cos^n(x)} = 6 \text{ است؛ پس:}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۳

حد مخرج در $x = 0$ برابر صفر است و جواب حد برابر $\frac{1}{4}$ است، پس حد صورت نیز باید در $x = 0$ برابر صفر باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 0} a + \sqrt{bx - c} = 0 \Rightarrow a + \sqrt{-c} = 0$$

$$\Rightarrow a = -\sqrt{-c} \quad (1) \Rightarrow a^2 = -c \quad (2) \quad (c < 0)$$

اکنون صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج صورت ضرب می کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a + \sqrt{bx - c}}{2x} \times \frac{a - \sqrt{bx - c}}{a - \sqrt{bx - c}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 - bx + c}{2x(a - \sqrt{bx - c})} \stackrel{(1) \text{ و } (2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-bx}{2x(-\sqrt{-c} - \sqrt{bx - c})} = \frac{-b}{2(-\sqrt{-c} - \sqrt{-c})} \\ &= \frac{b}{4\sqrt{-c}} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \sqrt{-c} \quad (3) \end{aligned}$$

حال داریم:

$$(1) \text{ و } (3) \Rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{(-\sqrt{-c})(\sqrt{-c})}{c} = \frac{c}{c} = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

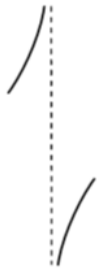
۱۴۴

با توجه به نمودار f ، داریم $f(2) = 3$ و مقدار f در مجاورت $x = 2$ ، از $y = 3$ کوچک تر است. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{3 - f(3 - x)} = - \frac{(-1)^1}{3 - (3^-)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{3 - f(3 - x)} = \frac{(-1)^0}{3 - (3^-)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

پس نمودار تابع g در مجاورت $x = 1$ به صورت مقابل است:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۴۵

حاصل حد وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-$ برابر بی نهایت است، پس $x = \frac{\pi}{6}$ ریشه مخرج است؛ بنابراین:

$$a \sin x + 4 \cos 2x = 0 \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} a \sin \frac{\pi}{6} + 4 \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} + 2 = 0 \Rightarrow a = -4$$

اکنون باید مشخص کنیم وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-$ ، مخرج با مقادیر کمتر از صفر یا مقادیر بیشتر از صفر، به آن نزدیک می شود. پس داریم:

$$\begin{aligned} -4 \sin x + 4 \cos 2x &= -4 \sin x + 4(1 - 2 \sin^2 x) = -4 \sin x + 4 - 8 \sin^2 x = -4(2 \sin^2 x + \sin x - 1) \\ &= -4(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) \end{aligned}$$

بنابراین:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{6}^- \Rightarrow \sin x \rightarrow \frac{1}{2}^- \Rightarrow 2 \sin x - 1 \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} \frac{-4 + b \tan^2 x}{-4(2 \sin x - 1)(\sin x + 1)} = \frac{-4 + \frac{1}{3}b}{-4(0^-)(\frac{3}{2})} = \frac{-4 + \frac{1}{3}b}{0^+} = -\infty$$

پس باید صورت کسر منفی باشد، یعنی:

$$-4 + \frac{1}{3}b < 0 \Rightarrow \frac{1}{3}b < 4 \Rightarrow b < 12$$

$a = -4$ و $b < 12$ ، پس $a + b < 8$ و حداکثر مقدار صحیح برای $a + b$ برابر ۷ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

ابتدا داریم:

۱۴۶

$$\begin{aligned}x &\rightarrow 2^+ \\ \Rightarrow 2x &\rightarrow 4^+ \\ \Rightarrow [-2x] &= -5\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (3 - [-2x])f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3 + 5)f(x) = 16 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 2c}}{x - 2} = 2$$

برای این که حاصل حد تابع f در $x = 2$ برابر ۲ شود، باید عبارت زیر رادیکال در صورت کسر مربع کامل باشد، زیرا در غیر این صورت حاصل حد برابر بی نهایت می شود؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 2c}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{a(x-2)^2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{a}|x-2|}{x - 2} \xrightarrow{x > 2} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{a}(x-2)}{x - 2} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

از طرفی:

$$a(x-2)^2 = ax^2 + bx + 2c \xrightarrow{a=4} 4x^2 - 16x + 16 = 4x^2 + bx + 2c \Rightarrow b = -16$$

اکنون حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} bf(x)$ را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16\sqrt{4(x-2)^2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-16 \times 2|x-2|}{x - 2} \stackrel{x < 0}{=} \frac{32(x-2)}{x - 2} = 32$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

ابتدا توجه می کنیم که اگر $a \neq 2$ باشد، حاصل حد نامتناهی خواهد شد، زیرا:

۱۴۷

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax - \sqrt{4x^2 + bx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - 2|x|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a - 2)x \xrightarrow{a \neq 2} \lim_{x \rightarrow +\infty} (a - 2)x = \infty$$

پس $a = 2$ است. حال به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + bx} \times \frac{2x + \sqrt{4x^2 + bx}}{2x + \sqrt{4x^2 + bx}}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - bx}{2x + \sqrt{4x^2 + bx}} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-bx}{2x + 2|x|} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-bx}{4x} = -\frac{b}{4} \\ \Rightarrow -\frac{b}{4} &= 3 \Rightarrow b = -12\end{aligned}$$

اکنون حاصل حد خواسته شده را به دست می آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{bx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{4x^2 - 12x}}{-12x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2|x|}{-12x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{-12x} = -\frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۱۴۸

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x+4} - x}{x - 2\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x+4} - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x+4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt[3]{x+4} - 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{(x+4)^2} + 2\sqrt[3]{x+4}+4} - 1 = \frac{2+2}{4+4+4} - 1 = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

توجه کنید که حد مخرج کسر داده شده در $X=1$ برابر صفر است و حد کسر در این نقطه نامتناهی نیست، بنابراین حد صورت کسر هم باید در این نقطه برابر صفر باشد، پس:

۱۴۹

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x-a} - \sqrt[3]{2x-b}) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1-a} = \sqrt[3]{2-b} \Rightarrow 1-a = 2-b \Rightarrow b = 1+a$$

پس حد مورد نظر به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-a} - \sqrt[3]{2x-a-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-a-(2x-a-1)}{x-1} \times \frac{1}{\sqrt[3]{(x-a)^2} + \sqrt[3]{(x-a)(2x-a-1)} + \sqrt[3]{(2x-a-1)^2}} = \frac{-1}{1} \times \frac{1}{3\sqrt[3]{(1-a)^2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{(1-a)^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1-a=1 \Rightarrow a=0 \text{ غ ق ق} \\ 1-a=-1 \Rightarrow a=2 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

بنابراین:

در نتیجه: $ab = 6$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{mx+2}{2x^2+2x-12} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{mx+2}{2(x-2)(x+3)} = \frac{2m+2}{0^+} = +\infty$$

توجه کنید که:

۱۵۰

$$2m+2 > 0 \Rightarrow m > -1$$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{mx+1}{x^2+2x-8} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{mx+1}{(x-2)(x+4)} = \frac{2m+1}{0^-} = +\infty$$

از طرف دیگر:

$$2m+1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$$

بنابراین:

در نتیجه مجموعه مقادیر ممکن m بازه $(-1, -\frac{1}{2})$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)